técnica

393

associação dos estudantes do instituto superior técnico

dezembro 1969

revista de engenharia

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA

$Ra = 2400\ kg/cm^2$
e
$Ra = 4000\ kg/cm^2$ (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE

TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

7.000 obras realizadas

coberturas
perfis especiais
vigas pré-esforçadas
pavimento trief
protecção de segurança

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Lab. Nac. de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 393 DEZEMBRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

João Soares Alves

Administrador

Silvério de Sousa Mendes

Secretário

Rui Coutinho Torrinha

Chefe de Redacção

Vladimiro de Oliveira

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

105 *CARVALHO FERNANDES* — **Realimentação em sistemas electrónicos lineares.**

The linear feedback theory in electronic systems.

127 *ALEXANDRE CERVEIRA, FONSECA DE MOURA, POMBO DUARTE* — **Canal binário afectado por ruído intermitente. Análise de um modelo.**

Binary communication in presence of burst noise analysy of model.

147 *GOMES DURÃO* - **Resolução das equações diferenciais correspondentes a sistemas vibrantes com w graus de liberdade.**

Resolution of differential equation applied to vibrating systems with w degrees of freedom.

164 **Do Mundo Técnico.**

Apoios não lubrificados em material plástico (Teflon) — «Digitatron»: Novo acessório de periféricos de computadores.

126 **Notas informativas.**

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

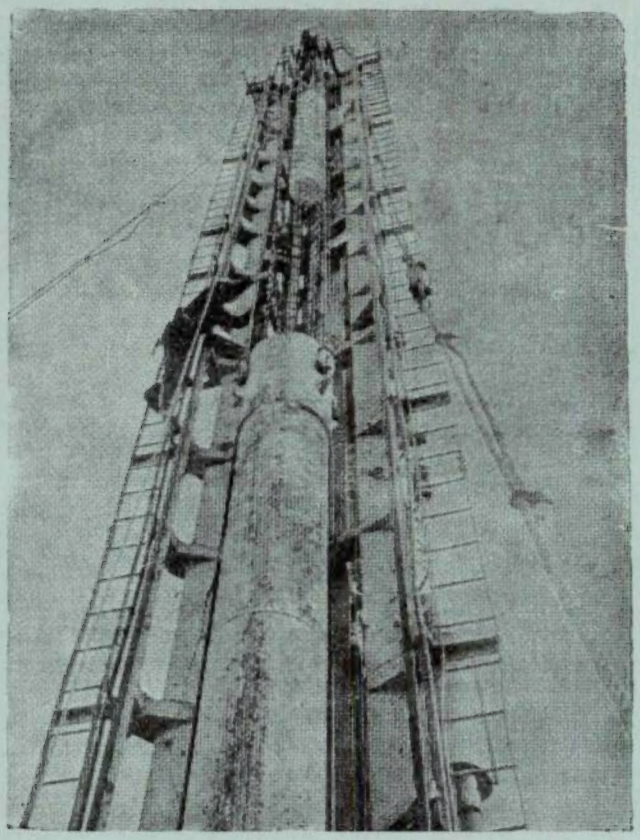
167 **Bibliografia**

CAPA: SILO DE LISBOA DA F. N. P. T. (Beato) – Capacidade para 60.000 t de trigo. O maior Silo de Portugal. Fundações sobre estacas de ø 100 cm (capacidade de carga de 500 t). Superestruturas (célula e torres) executadas com moldes deslizantes na altura de 40 metros. Empreitada global de CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA. (3 fases).

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXX
Aguiar & Melo	XXIX
Asea Eléctrica	V, XII e XXXI
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXIV
Empresa Electro Cerâmica	XXVII
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fábrica Portugal	XXII
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Frapil	XV
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XXVI
Heliaço	2.ª da capa
Hidrel	XXV
Hoechst Portuguesa	XXXI
I. S. T.	XXV
Isolux	XXVI
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	XXXII
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
Livros Técnicos	V e XXVII
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida, S A.R.L.	XXIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Orlando Fernandes, Lda.	VII, XXV e XXXII
Prisma	XXV
Rotring	XXVIII
Siemens	XXI
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Amadeu Gaudêncio	XXVII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
SEPSA	XIV
Standard Eléctrica	IX
Wild Portugal, Lda.	III

FUNDAÇÕES FRANKI L.DA



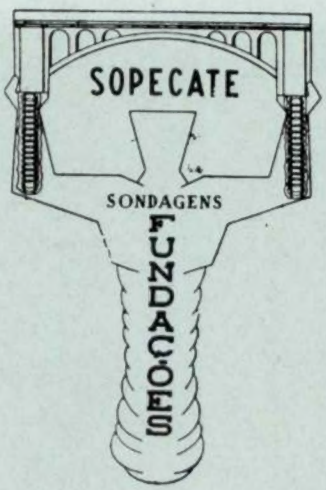
Um especialista em fundações

Rua Braamcamp, 13-3.° — LISBOA 1 — Tel. P. P. C. 53 41 12/3/4

End. Teleg.: FRANKI - LISBOA

Prédio Santos Gil, 6.° andar — Sala 10 — Tel. 9 11 67 — Caixa Postal 1397

Endereço Telegráfico: FRANKI - LOURENÇO MARQUES



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

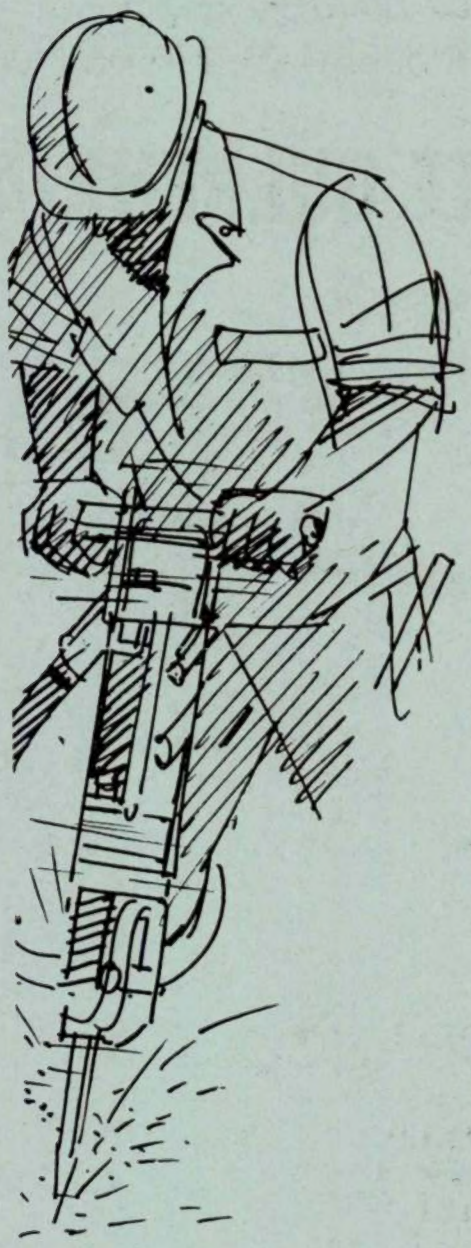
LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

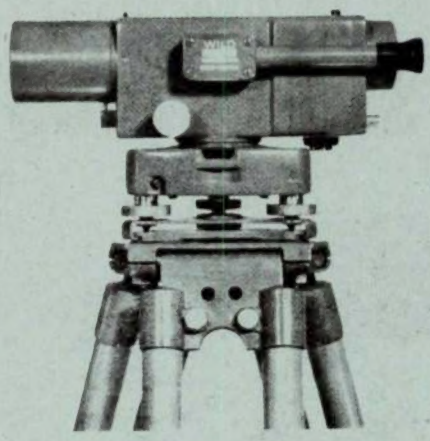
FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Inabalável

é o nosso
novo compensador





no nível automático para engenheiro WILD NA 2

Amortecedor eficiente para vento e vibrações do solo

Suspensão robusta do pêndulo

Além disso o novo

Botão de controlo do funcionamento

Dispensa de bater no tripé ou no instrumento

Acessório sob pedido:
Micrómetro de lâminas de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.
Imagem direita de observação de grande nitidez

Modelo NAK 2
com círculo de vidro

WILD
HEERBRUGG

Representantes exclusivos:

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 91 12

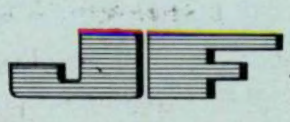
Teve a honra de colaborar
na resolução dos delicados problemas
da iluminação de uma das melhores
colecções de objectos de arte do mundo,
fornecendo para o:

MUSEU CALOUSTE GULBENKIAN

lâmpadas fluorescentes
ÓPTIMA
e incandescentes
SUPER BRANCO

da sua representada

O Corpo Técnico da Fundação Calouste Gulbenkian escolheu a ÓPTIMA e a SUPER-BRANCO em virtude da sua inexcedível fidelidade de reprodução cromática.



J. F DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA
Rua S. Francisco de Sales, 2 — Telefone 65 41 65 — Lisboa 1

Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

- Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
- Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
  a) com armadura de compressão reduzida
  b) com armadura de tracção reduzida
- Flexão simples de secções T duplamente armadas
- Flexão simples de secções T duplamente armadas
- Compressão simples
- Flexão composta de secções rectangulares
  a) com armadura simétrica
  b) com armadura de tracção reduzida
  c) com armadura de compressão reduzida
- Flexão composta desviada de secções rectangulares
- Flexão composta de secções em T
  a) com armadura de tracção reduzida
  b) comarmadura de compressão reduzida
- Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
- Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
- Esforço transverso

Preço 150$00

Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

- Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
- Flexão simples e flexão composta de circulares ocas

Preço 60$00

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

+ indicadora
+ reguladora
+ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S. 3 PORTO Tel. 0236732

IMPERMEABILIZANTES E ADITIVOS PARA CIMENTO

'PUDLO'

KERNER GREENWOOD & CO., LTD.
KING'S LINN, ENGLAND

PRODUTOS DA GAMA «PUDLO»:
Impermeabilizante líquido • Impermeabilizante em pó
Impermeabilizante incolor
Acelerador de presa • Tintas impermeabilizantes
Plastificante de argamassas • Endurecedores
Ligante para cimento • Cimento refractário «FEUSOL», etc.

DEPOSITÁRIO GERAL:

PILOTO & SANTOS, LDA.

LARGO DR. ANTÓNIO SOUSA MACEDO, 2
TELEFONE 678867 LISBOA-2

Representante exclusivo em Portugal Orlando Fernandes

RUA PALMIRA (aos Anjos), 46, A, B, C - Telefs. 830163-834879 - LISBOA-1

WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

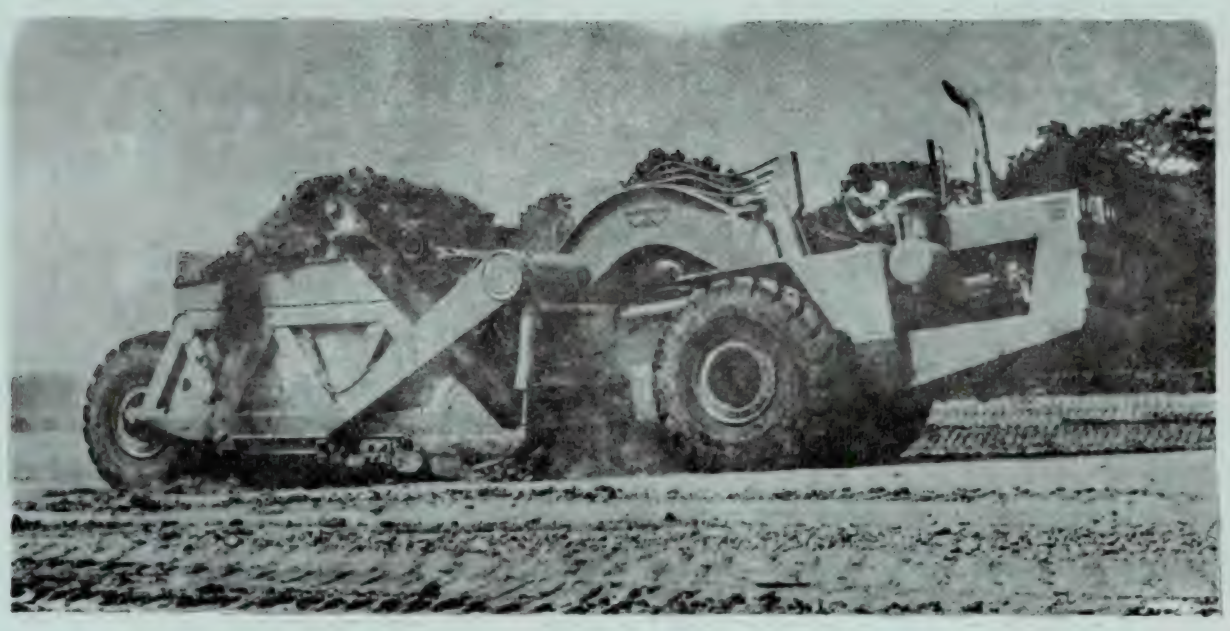
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.° — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Electrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 países, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 países entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica **ITT**

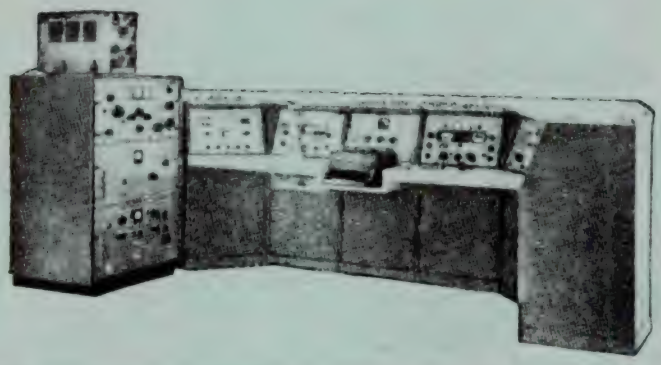
TG

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para impermeabilizar terrenos, paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TEL. EF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

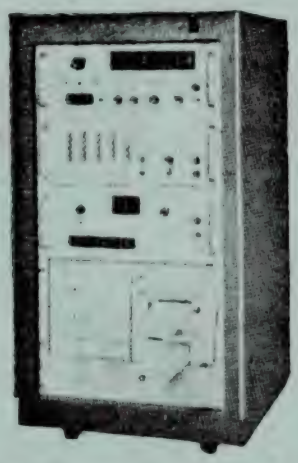
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

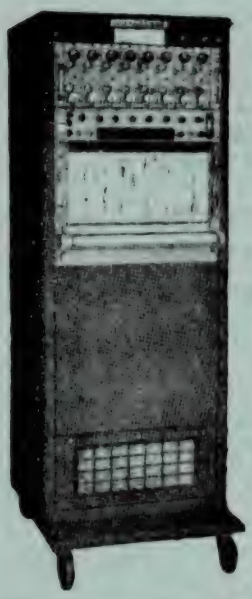
aparelhagem electrónica de medida e registo

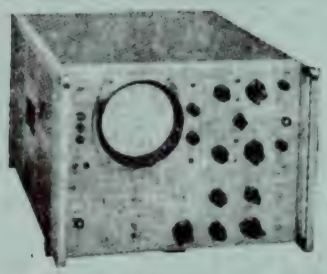
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn



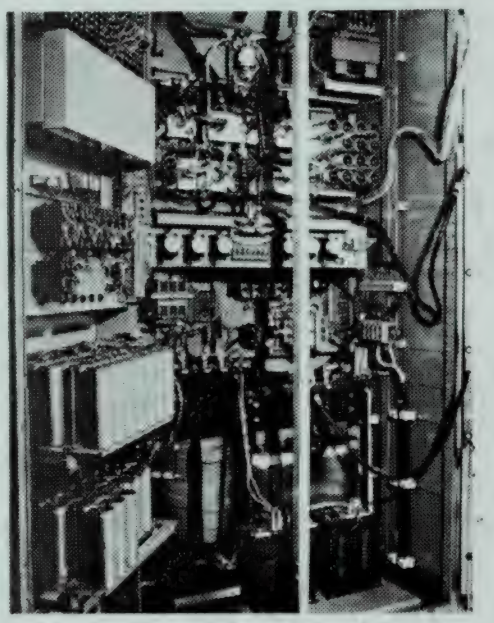


Oscilocópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

TAP TRANSPORTES AÉREOS PORTUGUESES



**O PRIMEIRO EQUIPAMENTO EM PORTUGAL
PARA ALIMENTAÇÃO
DE ENERGIA ESTABILIZADA
SEM INTERRUPÇÃO
COMPLETAMENTE TIRISTORIZADO
FORNECIDO E MONTADO PELA**

ASEA ELÉCTRICA, LDA.

Este equipamento destinado à alimentação em regime contínuo de 24 horas por dia de 2 computadores, tem uma potência total de 36 kVA e garante que os computadores são alimentados sem qualquer interrupção (mesmo em caso de avaria da rede) com uma tensão de 220 V ± 1 % e uma frequência de 50 Hz ± 0,3 %.

A ASEA baseada em longos anos de experiência, está em condições de estudar e fornecer equipamentos semelhantes para todos os fins em que se exija:

— Garantia de continuidade na alimentação de energia.

— Tensão e frequência rigorosamente mantidas dentro de limites pré-determinados.

MARCA-AEE-3

**UMA FORÇA CRIADORA
NO DOMÍNIO
DA ELECTRICIDADE**

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Est. do Prior Velho - Tel. 2511101 (5 linhas) - SACAVÉM • R. do Campo Alegre, 144 - Tel. 672339 - PORTO

TÉCNICA

NÚMERO 393 DEZEMBRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.375.13 : 621.373.421

REALIMENTAÇÃO EM SISTEMAS ELECTRÓNICOS LINEARES (*)

pelo Prof. ANTÓNIO DE CARVALHO FERNANDES

RESUMO

Utilizando o Cálculo Operacional com base na Transformação de Laplace e a Teoria das Funções de Variável Complexa, apresenta-se, neste artigo, a Teoria da Realimentação em Sistemas Lineares e a sua aplicação a Sistemas Electrónicos. Tratam-se em pormenor as configurações típicas de Amplificadores e Osciladores com Realimentação e estudam-se exemplos concretos. Apresentam-se e justificam-se, com generalidade, os critérios de estabilidade em sistemas com realimentação, com referência especial aos critérios de Routh e Nyquist.

SYNOPSIS

The Linear Feedback Theory and its applications to Electronic Systems is presented in this paper, making use of the Operational Calculus (based on the Laplace Transformation) and of the Theory of Functions of Complex Variable. Typical feedback circuit configurations in amplifiers and oscillators and pratical examples are dealt with in detail. The theoretical justification for the stability criteria in Linear feedback systems is given with generality. Special reference is made to the Routh and the Nyquist criteria.

1. INTRODUÇÃO

1.1 Definição

Imaginemos um *sistema físico*, com uma *entrada*, onde se aplica uma *excitação*, e uma *saída*, onde se observa a *resposta* correspondente a essa excitação. Pois bem, se uma parte da variável de saída for combinada com a *variável de entrada*, diz-se que tem lugar o processo de *realimentação*; em linguagem corrente, diz-se que uma parte da saída é realimentada na entrada. A combinação da *variável de realimentação* com a *variável de entrada* dá origem ao que chamamos a *variável de combinação* e é esta a variável que, nos sistemas mais simples, vai excitar o amplificador ou, de modo geral, o elemento activo do sistema. A maneira como se faz esta combinação condiciona o tipo de realimentação; se o efeito resultante conduz a um fortalecimento do sinal efectivo de entrada, a realimentação diz-se *directa*, *positiva* ou *regenerativa*; se, contudo, a combinação corresponde a um enfraquecimento do sinal efectivo de entrada, a realimentação diz-se *inversa*, *negativa* ou *degenerativa*.

Na realimentação positiva, a variável de realimentação tende a fortalecer a variável de entrada e pode mesmo ter preponderância em relação a esta, de tal modo que o sistema tenderá a ser auto-excitado. Nos sistemas físicos auto-excitados há, na maior parte dos casos, um processo de realimentação positiva. A auto-excitação oferece-

(*) Uma versão condensada deste Artigo foi apresentada em Comunicação feita à Academia das Ciências de Lisboa (Classe de Ciências) em 20 de Novembro de 1969.

-nos grandes oportunidades, por exemplo, no campo dos osciladores; pode contudo representar um grande perigo, por exemplo, ao dar origem a oscilações espontâneas, não desejadas. A realimentação positiva é, por assim dizer, uma arma de dois gumes.

Na realimentação negativa há uma acção de moderação, de estabilização, de correcção e de linearização. O processo de realimentação negativa nos sistemas físicos é, digamos, uma benção de que nem sempre nos apercebemos. Quer o sistema físico seja um amplificador electrónico, ou um servomecanismo, ou parte de um ser vivo, ou um ser vivo, ou um conjunto de seres vivos, a realimentação negativa contraria as perturbações internas, as variações inesperadas nos parâmetros e a selectividade interna; deste modo, o comportamento global do sistema tende a ser pouco afectado pelas perturbações internas e pelas variações nos parâmetros e tende ainda a ser menos discriminativo na sua resposta a estímulos de diferentes frequências.

A realimentação é um processo fundamental na Natureza e tem lugar numa infinidade de circunstâncias, no mundo em que vivemos. Neste estudo, apresentamos inicialmente o problema com generalidade. Restringimos, contudo, a sua análise ao caso de sistemas lineares (ou que possam ser tratados como lineares), no domínio da Electrónica. Dos dispositivos electrónicos, os mais utilizados são os semicondutores. Estes dispositivos têm características que dependem acentuadamente da temperatura e doutras condições exteriores; por outro lado, as características de um semicondutor variam acentuadamente de unidade para unidade, embora do mesmo tipo. É com o emprego sistemático da realimentação negativa que conseguimos a estabilidade de funcionamento de circuitos com semicondutores. Estas circunstâncias não se verificavam tão acentuadamente no caso das válvulas electrónicas, cujas características dependiam essencialmente da configuração geométrica dos seus eléctrodos e do grau de vácuo em que se situavam. Por isso, a técnica de circuitos, na Electrónica, tem vindo a sofrer alterações profundas, com uma utilização cada vez mais intensa dos processos de realimentação. Daí, a importância cada vez maior da realimentação em sistemas electrónicos.

Analisemos, nesta Introdução, alguns exemplos simples de sistemas com realimentação.

1.2 Amplificador com realimentação

Consideremos o caso muito simples de um conjunto amplificador, com realimentação negativa, em que pretendemos que o *sinal de saída* seja, em certo grau, a fiel reprodução, amplificada, do *sinal de entrada*. Um esquema bloco, muito simples, de um sistema amplificador, com realimentação, é dado na fig. 1.1. Os blocos fundamentais são o *Amplificador* e a *Malha de Realimentação*; de notar ainda, o *Ponto de Junção* onde se faz a combinação da *variável de entrada* com a *variável de realimentação*, emergindo assim a *variável de combinação*. Veremos adiante a análise matemática do sistema, a definição matemática de realimentação e a sua caracterização como positiva ou negativa.

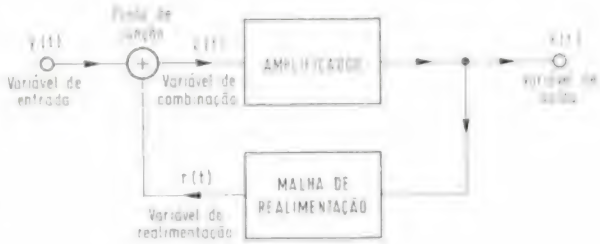


Fig. 1.1

No amplificador pròpriamente dito, utilizando dispositivos electrónicos, temos de contar com *ruído* gerado internamente, com variações grandes nos parâmetros (por exemplo, com a temperatura e com o envelhecimento), com uma acentuada não-linearidade (de que resultam componentes estranhos de frequência no sinal de saída), com um comportamento selectivo relativamente à frequência, com variações nas fontes de alimentação, com ruído introduzido por estas fontes. Pois bem, é preciso que a acção de todos estes factores de perturbação seja contrariada e é para esse efeito que se utiliza a realimentação negativa.

1.3 Sistema de comando com realimentação

Consideremos agora outro exemplo, o caso de um *sistema de comando com realimentação*, em que se exerce uma acção de comando sobre a variável de saída, de acordo com os ditames da variável de entrada e, como no caso anterior, também na presença de perturbações inevitáveis. Num tal

sistema, ilustrado no esquema da fig. 1.2, a *saída* é medida e a variável correspondente a essa medida é realimentada e comparada com a *entrada*. A combinação da entrada com a saída designa-se neste caso, por *erro*. Este erro vai actuar na parte activa do sistema (que, em geral, assegura forte amplificação) com o objectivo de conseguir que a saída satisfaça a acção de comando em conformidade estreita (até um certo grau) com a entrada. Por outras palavras, um sistema de comando com realimentação negativa é um sistema com correcção de erros a fim de obter uma saída [1] em conformidade com os comandos derivados de uma dada entrada.

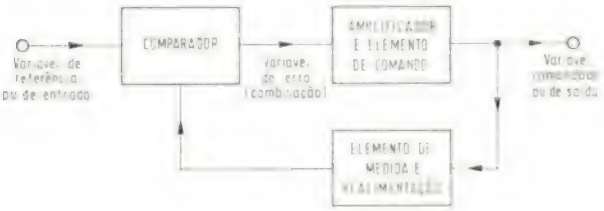


Fig 1.2

1.4 Casos práticos de sistemas de comando com realimentação

Os sistemas de comando com realimentação têm inúmeras aplicações. O sistema de termóstato, para manter dentro de certos limites a temperatura de uma sala, é um exemplo flagrante, muito simples. A temperatura é medida e comparada com o valor prèviamente escolhido e graduado no termóstato. Se a temperatura ambiente tende a baixar além do limite desejado, gera-se uma acção de comando para assegurar mais aquecimento (num caso muito simples, é ligado o interruptor do aquecedor eléctrico). Quando a temperatura tende a subir além do limite fixado, gera-se uma acção de comando para reduzir o aquecimento.

Outro exemplo, mais complexo, é o sistema destinado a «apontar» uma antena extremamente direccional a, digamos, uma nave, ou um satélite, que se desloca no espaço. Uma tal antena pode ter uma directividade a que corresponde uma abertura de feixe de um décimo de grau e terá um reflector parabolóide com cerca de 60 m de diâmetro, pesando muitas toneladas. A velocidade de deslocação do eixo da antena poderá ser da ordem de meio grau por segundo. O sistema de comando, com realimentação, é ilustrado no esquema da fig. 1.3. O comando para o estabelecimento da posição da antena é originado por um computador que segue, com todo o rigor matemático possível, o programa relativo à trajectória prèviamente determinada, da nave espacial. Nestas condições, o computador determina, rigorosamente, em cada instante, a posição calculada para o eixo da antena e a informação respectiva passa através de um amplificador para comandar o motor de posição. Há contudo, inevitàvelmente, perturbações no sistema de comando e a «posição» real pode não coincidir rigorosamente com a posição ideal determinada teòricamente pelo computador. Assim, a posição «efectiva» da antena é medida e a informação respectiva é realimentada na entrada onde é comparada com a posição ideal determinada pelo computador. A combinação, ou erro, é usada para corrigir a posição da antena, de modo que esta coincida, efectivamente, com a posição ideal.

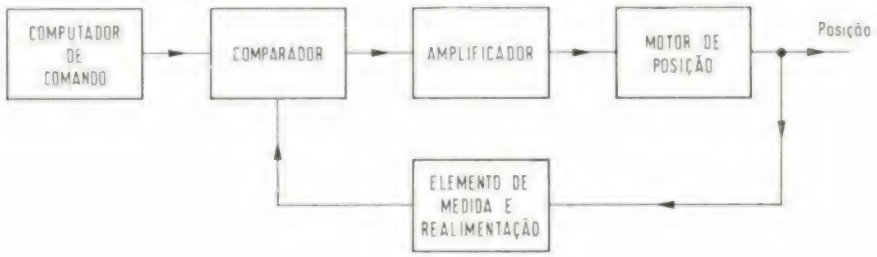


Fig. 1.3

Podemos ainda citar outros exemplos, agora

[1] Por exemplo, quando a saída corresponde a uma acção mecânica, temos um *servomecanismo*.

no domínio da fisiologia, onde, de facto, quase todos os processos utilizam a realimentação. No processo relativamente complexo de conduzir um automóvel, os órgãos dos sentidos (especialmente a vista) coligem constantemente informações (sobre a estrada, a posição e a velocidade de outros carros, a velocidade própria, etc.) e realimentam esta informação para o cérebro, onde, em comparação com experiência prèviamente armazenada (informação retida na memória), se iniciam os sinais de comando para as mãos no volante e o pé no acelerador ou no travão.

1.5 Sistemas lineares e não-lineares

O comportamento dos sistemas físicos pode ser linear (ou aproximadamente linear) e não-linear. De facto, todos os sistemas físicos são, em certo grau, não-lineares. Quando, contudo, o efeito da não-linearidade é muito pequeno e os parâmetros variam muito lentamente no tempo, a análise pode ser feita admitindo linearidade do sistema que se supõe de parâmetros constantes. Isto equivale a admitir que o comportamento do sistema é traduzido por equações diferenciais lineares. Neste caso, a análise matemática é relativamente simples e as conclusões obtidas são gerais e rigorosas, em relação ao sistema linear considerado. Quando, contudo, o sistema físico em questão apresenta propriedades acentuadas de saturação, de limitação ou de histerese, significativas de forte não-linearidade, não podemos adoptar a simplificação da quase-linearidade e temos de adoptar as técnicas de análise gráfica e numérica peculiares à integração de equações diferenciais não-lineares. Neste estudo, vamos admitir que estamos em presença de sistemas cujo comportamento pode ser traduzido, dentro de certa aproximação, por equações diferenciais lineares; por outras palavras, vamos admitir que se trata de sistemas que podem ser tratados como se fossem lineares.

Vamos ainda utilizar, sistemàticamente, na análise destes sistemas, o Cálculo Operacional com base na Transformação de Laplace e trabalhar não só no domínio da variável tempo mas, essencialmente, no domínio da variável complexa s. O conceito de *Função de Transferência* vai ter um papel fundamental no nosso estudo.

No esquema-bloco da fig. 1.1 fazemos referência às funções da variável tempo:

y (t) variável de entrada ou de excitação;
x (t) variável de saída ou de resposta;
c (t) variável de combinação ou de erro;
r (t) variável de realimentação.

As respectivas transformadas de Laplace são designadas, respectivamente, por:

$$Y(s),\ X(s),\ C(s),\ R(s)$$

e representam as ditas funções no domínio da variável complexa $s = \sigma + j\omega$ do Cálculo Operacional ([2]).

O conceito de *função de transferência*, no domínio da variável complexa s, aparece-nos tal como definido no Cálculo Operacional; a sua transformada inversa é designada por *resposta à função impulsiva unitária*, como se mostra no Apêndice n.º 6, a propósito da *estabilidade* de sistemas com realimentação.

2. EQUAÇÕES BASICAS DA REALIMENTAÇÃO

2.1 Equação básica

Consideremos novamente o esquema básico de um sistema, como se representa na fig. 2.1 em que as funções dizem respeito, ou a tensões, ou a correntes, eléctricas; admitamos que se trata de sistemas lineares, inicialmente em repouso, e que há continuidade na origem (dos tempos) das

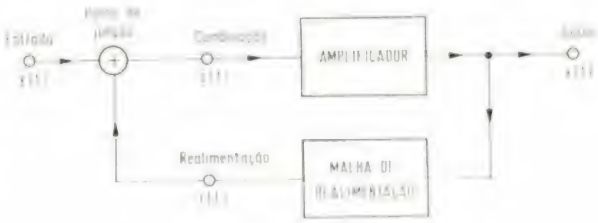


Fig. 2.1

variáveis em jogo e das suas derivadas, de tal modo que possamos definir, como funções de transferência:

([2]) V. p. exp. § 2 do artigo do autor, «Amplificadores Operacionais em Computação Electrónica Analógica», pp. 223 a 233, «Técnica» n.º 365, 1967.

— Ganho do Amplificador pròpriamente dito

$$A(s) = \frac{X(s)}{C(s)} \qquad (2.1)$$

— Fracção de Realimentação

$$\beta(s) = \frac{R(s)}{X(s)} \qquad (2.2)$$

— Ganho Global

$$K(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \qquad (2.3)$$

Se, no ponto de junção, a combinação se fizer *por adição*, o que é significado pelo sinal (+) no esquema da fig. 2.1, a função erro, ou combinação, será

$$c(t) = y(t) + r(t) \qquad (2.4)$$

$$C(s) = Y(s) + R(s) \qquad (2.5)$$

Dividindo os termos da equação (2.5) por X (s) e tendo em consideração as equações (2.1) a (2.3) obter-se-á

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{1}{K(s)} + \beta(s) \qquad (2.6)$$

ou seja

$$K(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s)\,A(s)} \qquad (2.7)$$

que é a *equação básica da realimentação.*

2.2 Combinação por subtracção

Se a combinação se fizesse *por subtracção*, o que seria indicado por um sinal (—) no ponto de junção, teríamos a equação (2.4-a), em vez da equação (2.4)

$$c(t) = y(t) - r(t) \qquad (2.4-a)$$

e a equação básica da realimentação teria o aspecto

$$K(s) = \frac{A(s)}{1 + \beta(s)\,A(s)} \qquad (2.7-a)$$

A relação

$$F = \frac{A(s)}{K(s)} \qquad (2.8)$$

costuma designar-se por F (s) e será dada por (2.9) ou (2.9-a) conforme a combinação se fizer, ou por adição, ou por subtracção.

$$F(s) = 1 - \beta(s)\,A(s) = 1 - T(s) \qquad (2.9)$$

$$F(s) = 1 + \beta(s)\,A(s) = 1 + T(s) \qquad (2.9-a)$$

No estudo que estamos a fazer, admitimos que a combinação se faz por adição e é nessa base que prosseguimos.

Em qualquer caso, devemos notar que a equação básica da realimentação nos dá a função de transferência global (ou ganho global) K a partir da função de transferência (ou ganho) do amplificador pròpriamente dito A e da fracção de realimentação β. Por outras palavras, esta equação diz-nos como a realimentação afecta a função de transferência global do sistema.

Quanto ao factor F (s), muitas vezes exprime-se o seu módulo em unidades logarítmicas, por

$$20 \log_{10} |F| \text{ dB} \qquad (2.10)$$

2.3 Realimentação negativa e realimentação positiva

A equação básica da realimentação traduz as propriedades fundamentais dos sistemas com realimentação. Imediatamente, podemos observar que quando for

$$|F(s)| = |1 - \beta(s)\,A(s)| > 1 \qquad (2.11)$$

será

$$|A(s)| > |K(s)| \qquad (2.12)$$

o que significa que o ganho global resultante será menor que o ganho do amplificador pròpriamente dito. A combinação do sinal realimentado com o sinal de entrada fez-se de tal modo que houve uma degeneração. Diz-se então que a realimentação é *inversa, negativa* ou *degenerativa*. Esta redução no ganho global é, afinal, o preço por que se pagam as vantagens a que nos referimos no § 1.1, relativas à realimentação negativa.

Quando se verificar a condição

$$|F(s)| = |1 - \beta(s)\,A(s)| < 1 \qquad (2.13)$$

diz-se que a realimentação é *directa, positiva* ou *regenerativa* e o ganho global resultante será maior que o ganho do amplificador pròpriamente dito. É ainda de notar que quando for

$$1 = \beta(s)\ A(s) \qquad (2.14)$$

o ganho global será teòricamente infinito, o que corresponde à circunstância prática de ser

$$y(t) = 0 \qquad (2.15)$$

$$c(t) = r(t) \qquad (2.16)$$

e o sistema ser portanto auto-excitado. É o caso dos *osciladores de realimentação.*

2.4 Vantagens da realimentação negativa

Concentremos por agora a nossa atenção no caso de a realimentação ser negativa, isto é, de o ganho global ser inferior ao ganho do amplificador pròpriamente dito. À primeira vista, esta circunstância poderia parecer prejudicial, a menos que a redução no ganho tivesse, como compensação, outras vantagens. Vamos verificar que assim é e comecemos por ter em consideração que o ganho A do amplificador depende muito dos parâmetros dos elementos activos e estes, por sua vez, dependem da temperatura e de outras condições variáveis no funcionamento (tensões de alimentação, envelhecimento dos elementos, etc.), como já foi mencionado anteriormente.

Suponhamos que a uma variação infinitesimal dos parâmetros corresponde a variação ∂A no ganho do amplificador. À variação relativa $\partial A/A$ corresponderá a variação relativa $\partial K/K$ no ganho global dada pela relação

$$\frac{\partial K}{K} = \frac{\partial A}{A}\ \frac{1}{1-\beta A} \qquad (2.17)$$

como se conclui fàcilmente de (2.7). Isto significa que, com realimentação negativa, a variação relativa do ganho global será menor que a do ganho do amplificador pròpriamente dito. Suponhamos que, por exemplo, $|1-\beta A| = 100$. Isto significa que, a uma variação de, por exemplo, 20 % em A, corresponderia uma variação de, apenas, 0,2 % em K. Vejamos até que ponto esta circunstância pode ser exagerada e admitamos que o factor de realimentação é tal que

$$|\beta A| >> 1. \qquad (2.18)$$

De (7) conclui-se que será

$$|K \simeq \frac{1}{|\beta|} \qquad (2.19)$$

o que significa que o ganho global se tornou, pràticamente, independente do ganho do amplificador pròpriamente dito, dependendo apenas dos elementos da malha de realimentação. E visto que estes podem ser elementos passivos, tais como resistências e condensadores, podem obter-se circuitos de ganho extremamente constante, desde que se utilize realimentação negativa em alto grau.

Analisemos agora a influência da realimentação negativa no que diz respeito ao que poderíamos chamar *sinais estranhos gerados no próprio amplificador.* De facto, estes sinais estranhos podem ser, por exemplo, componentes de ruído ou ainda componentes resultantes da distorção não-linear

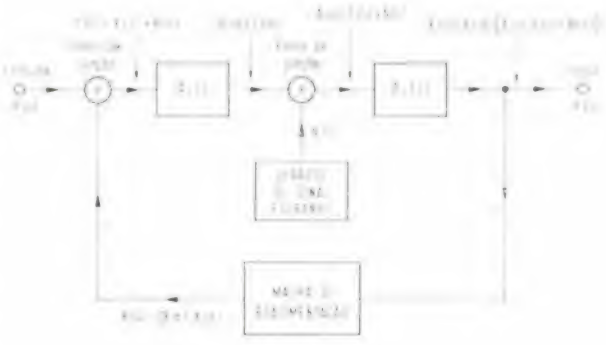


Fig. 2.2

do amplificador. A análise que vamos fazer elucidar-nos-á portanto quanto às vantagens da realimentação negativa neste campo. Para esse efeito, consideremos um esquema, como se mostra na fig. 2.2, em que o amplificador é dividido em duas secções de ganhos, respectivamente, A_1 e A_2 entre os quais se considera intercalado um gerador de sinais estranhos a que corresponde a tensão n (t) com a transformada de Laplace N (s). Admitimos ainda que as condições são tais que as tensões (no domínio da variável s) nos dife-

rentes pontos do sistema, são as lá indicadas. A tensão de saída será assim:

$$X = A_1 A_2 C + A_2 N \qquad (2.20)$$

$$X = A_1 A_2 (Y + \beta X) + A_2 N \qquad (2.21)$$

de onde se conclui, designando por

$$A = A_1 A_2 \ , \qquad (2.21)$$

$$X = \frac{A}{1 - A\beta} (Y + \frac{N}{A_1}) \qquad (2.23)$$

Se não houvesse realimentação ($\beta = 0$) o sinal estranho apareceria na saída multiplicado pelo factor A_2. Havendo realimentação, esse factor será $\frac{A_2}{1 - A_1 A_2 \beta}$ e, no caso da realimentação negativa será, portanto, muito menor. Dando a este sinal estranho o significado físico de *ruído* gerado no amplificador, podemos determinar a relação sinal/ /ruído encontrando-se a expressão (2.24) que, como vemos,

$$\frac{A_1 A_2 Y}{A_2 N} = \frac{A_1 Y}{N} \qquad (2.24)$$

é independente da realimentação. Deve, contudo, notar-se que o ganho do amplificador pròpriamente dito (e portanto A_1) poderá ser maior no caso de haver realimentação negativa, o que significa uma melhor relação sinal/ruído, neste caso. A utilização da realimentação negativa pode assim melhorar nìtidamente a relação sinal/ruído, no que se refere ao ruído gerado em pontos intermédios do amplificador. Considerações semelhantes podem ser feitas no caso de o «sinal estranho» representar uma ou mais componentes de frequência resultantes de distorção não-linear no amplificador.

Concluímos assim, das deduções que fizemos, que a realimentação negativa tende a estabilizar o funcionamento do conjunto amplificador e permite melhorar a relação sinal/ruído quando o ruído é gerado internamente no amplificador. Tende ainda a reduzir o efeito da distorção não-linear.

Outros efeitos da realimentação negativa serão apontados ao tratarmos de circuitos práticos de amplificação com realimentação.

3. CONFIGURAÇÕES TÍPICAS DE AMPLIFICADORES COM REALIMENTAÇÃO

3.1 Considerações gerais

Até agora, considerámos apenas esquemas-blocos ao estabelecermos as equações básicas da realimentação. Estas equações são válidas no domínio da variável complexa $s = \sigma + j\omega$ e dizem respeito a funções de transferência tais como o ganho A (s) do amplificador pròpriamente dito e o ganho global K (s). Nas equações fundamentais, intervém ainda a fracção de realimentação β (s) que é igual à relação entre a variável de realimentação e a variável de saída. Estas funções de transferência A (s), K (s) e β (s) podem ser determinadas para cada caso, a partir das equações diferenciais lineares relativas aos circuitos; podem ainda ser estabelecidas a partir de regras relativamente simples do Cálculo Operacional ([3]).

Conhecidas as funções de transferência, pode estudar-se o comportamento do sistema para qualquer excitação y (t). De facto, a partir de Y (s), determinar-se-ão X (s), R (s) e C (s) a partir de, respectivamente, (2.3), (2.2) e (2.1). As respectivas transformadas inversas dar-nos-ão as variáveis x (t), r (t) e c (t) no domínio do tempo.

Quando queremos estudar o comportamento do sistema para uma excitação sinusoidal, o estudo simplifica-se pois que, admitida a linearidade, os regimes forçados no sistema serão sinusoidais; isso equivale a considerar $s = j\omega$ e a utilização do Cálculo Simbólico das Correntes Alternadas leva ainda a uma maior simplificação.

Ao estudarmos configurações típicas de amplificadores com realimentação — o que vamos fazer a seguir — consideramos o caso geral de trabalharmos no domínio da variável complexa s, como temos feito até aqui. Em Apêndices, estudaremos exemplos de circuitos práticos e, nestes exemplos, tratamos o caso mais simples de a excitação ser uma tensão ou uma corrente sinusoidal; consideramos ainda que o funcionamento é linear (o que nos permite o emprego de circuitos equivalentes para os dispositivos electrónicos) e preocupamo-nos apenas com os regimes forçados no sistema. Veremos ainda que os circuitos em questão poderiam ser estudados em si próprios, sem

([3]) Este assunto é tratado em pormenor na Cadeira de Análise Superior do I.S.T.

auxílio das equações básicas da realimentação; mas que estas têm, em geral, uma dupla vantagem: a de simplificarem a análise do sistema e a de tornarem nítido o significado físico dos processos utilizados.

A realimentação, em circuitos electrónicos, pode tomar os mais variados aspectos. Começa por existir nos próprios dispositivos electrónicos onde é inerente ao seu funcionamento. Através dos circuitos associados, podemos realimentar (na entrada) ou uma tensão ou uma corrente, que, por sua vez, é proporcional ou à corrente ou à tensão na saída; a realimentação pode ser ou simples ou composta (neste caso usamos mais do que um tipo de realimentação). Se se tratar de um circuito de amplificação com mais de um andar de amplificação, a realimentação pode ser, ou *parcial*, ou *global*, como se ilustra no esquema da fig. 3.1.

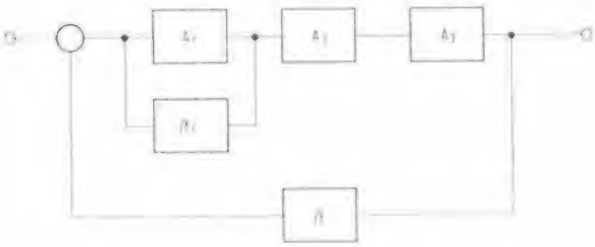


Fig. 3.1

A realimentação parcial através da malha β_1, tem uma acção local; a realimentação através da malha β é uma realimentação global.

Nas configurações típicas que vamos estudar, as conclusões que se obtêm são válidas para uma realimentação global; é evidente, contudo, que serão aplicáveis também quando o amplificador tiver um só andar.

3.2 Realimentação por impedância de transferência (realimentação série-série)

O esquema básico correspondente é ilustrado na fig. 3.2. A tensão realimentada V_{ra} é proporcional à corrente na saída I_o e o factor de proporcionalidade é a chamada *impedância de transferência* Z_β.

Fig. 3.2

As respectivas equações são (3.1) a (3.5).

$$Z_\beta = \frac{V_{ra}(s)}{I_o(s)} \tag{3.1}$$

$$A(s) = \frac{V_o(s)}{C(s)} \tag{3.2}$$

$$\beta(s) = \frac{V_{ra}(s)}{V_o(s)} = \frac{I_o(s)\, Z_\beta}{I_o(s)\, Z_L} = \frac{Z_\beta}{Z_L} \tag{3.3}$$

$$K(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \tag{3.4}$$

$$K(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s)\, A(s)} \tag{3.5}$$

Há que notar que as impedâncias Z_β e Z_L são também funções da variável complexa s, no contexto do Cálculo Operacional que estamos a utilizar.

Em relação ao esquema da fig. 3.2 devemos reparar que quando for $Z_L = \infty$ isto é quando a saída estiver em circuito aberto, a corrente na saída será nula e não haverá realimentação.

Esta configuração de *realimentação por impedância de transferência* também é designada por *realimentação série-série*, por as ligações, quer na saída, quer na entrada, serem feitas em série. Como o sinal realimentado é proporcional à corrente de saída diz-se, em linguagem prática, que se trata de uma *realimentação de corrente*.

No APÊNDICE I tratam-se os seguintes circuitos, como exemplos desta configuração típica: *Circuito de Degeneração Catódica* (com válvula) e *Circuito de Degeneração de Emissor* (com transistor). Em relação a estes exemplos, analisamos ainda a influência da realimentação nas impedâncias de entrada e de saída dos respectivos circuitos.

3.3. Realimentação por relação de tensões (realimentação derivação-série)

O esquema básico é ilustrado na fig. 3.3. A tensão realimentada V_{ra} é proporcional à tensão de saída V_o. As respectivas equações são (3.6) a (3.9).

$$A(s) = \frac{V_o(s)}{C(s)} \tag{3.6}$$

$$\beta(s) = \frac{V_{ra}(s)}{V_o(s)} \tag{3.7}$$

$$K(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \tag{3.8}$$

$$K(s) = \frac{A(s)}{1-\beta(s)\,A(s)} \tag{3.9}$$

É de notar que quando for $Z_L = 0$, isto é, quando a saída estiver em curto-circuito, a tensão de saída será nula e não haverá realimentação.

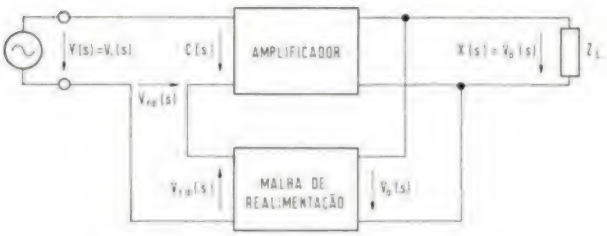


Fig. 3.3

Esta configuração de *realimentação por relação de tensões* também é designada por *realimentação derivação (na saída) — série (na entrada)* por as ligações serem feitas em derivação na saída e em série na entrada, como se observa no esquema da fig. 3.3. Como o sinal realimentado é proporcional à tensão de saída, diz-se que se trata de uma *realimentação de tensão.*

No APÊNDICE II, trata-se o *Circuito de Realimentação de Tensão, com Acoplamento R-C* como exemplo desta configuração típica dedicando-se especial atenção ao alargamento da faixa de frequência útil do amplificador, como resultado da realimentação negativa.

No APÊNDICE III, estuda-se um circuito com realimentação composta, em que se utilizam, simultâneamente, os circuitos básicos estudados nos §§ 3.2 e 3.3.

3.4. Realimentação por admitância de transferência (realimentação derivação-derivação)

O esquema básico correspondente é ilustrado na fig. 3.4. Neste caso, o sinal realimentado é a corrente I_{ra} que é proporcional à tensão de saída V_o, sendo o factor de proporcionalidade a admitância de transferência Y_β. As respectivas equações são (3.10) a (3.17). Os índices i significam que o sinal realimentado é uma corrente.

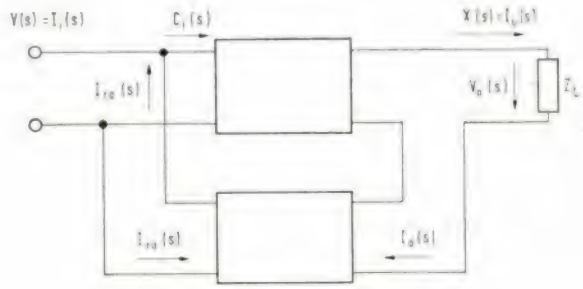


Fig 3.4

$$Y_\beta = \frac{I_{ra}(s)}{V_o(s)} \tag{3.10}$$

$$A_i(s) = \frac{X(s)}{C(s)} = \frac{I_o(s)}{C_i(s)} \tag{3.11}$$

$$\beta_i(s) = \frac{I_{ra}(s)}{I_o(s)} \tag{3.12}$$

$$K_i(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \tag{3.13}$$

$$C_i = I_{ra} + I_i \tag{3.14}$$

$$\frac{C_i}{I_o} = \frac{I_{ra}}{I_o} + \frac{I_i}{I_o} \qquad (3.15)$$

$$\frac{1}{A_i} = \beta_i + \frac{1}{K_i} \qquad (3.16)$$

$$K_i(s) = \frac{A_i(s)}{1 - \beta_i(s)\, A_i(s)} \qquad (3.17)$$

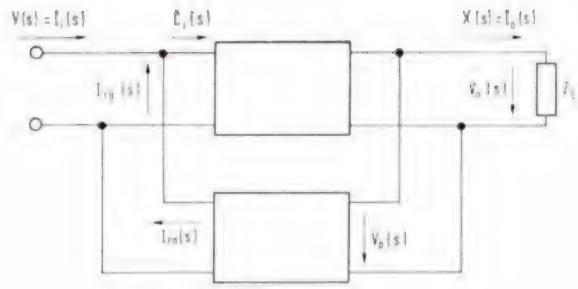


Fig. 3.5

Quando for $Z_L = 0$ (e, portanto, a saída estiver em curto-circuito) será $V_o = 0$ e não haverá realimentação.

Esta configuração de *realimentação por admitância de transferência* também é designada por *realimentação derivação-derivação.*

No APÊNDICE IV, estuda-se, como exemplo, o *Circuito de Realimentação Local em Derivação,* dando-se especial atenção à influência da realimentação nos ganhos de corrente e de tensão e nas impedâncias de entrada e de saída.

3.5 Realimentação por relação de correntes (realimentação série-derivação)

O esquema básico correspondente é ilustrado na fig. 3.5. Também neste caso o sinal realimentado é a corrente I_{ra} que é proporcional à corrente de saída I_o. As respectivas equações são (3.18) a (3.21).

$$A_i(s) = \frac{X(s)}{C(s)} = \frac{I_o(s)}{C_i(s)} \qquad (3.18)$$

$$\beta_i(s) = \frac{I_{ra}(s)}{I_o(s)} \qquad (3.19)$$

$$K_i(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \qquad (3.20)$$

$$K_i(s) = \frac{A_i(s)}{1 - \beta_i(s)\, A_i(s)} \qquad (3.21)$$

Quando for $Z_L = \infty$ (e, portanto, a saída estiver em circuito aberto) será $I_o = 0$ e não haverá realimentação.

Esta configuração de *realimentação por relação de correntes* também é designada por *realimentação série (na saída) — derivação (na entrada).*

APÊNDICE I (*)

EXEMPLOS DE REALIMENTAÇÃO POR IMPEDÂNCIA DE TRANSFERÊNCIA

I.1 Circuito de Degeneração Catódica (**)

É possível introduzir realimentação local por impedância de transferência num andar amplificador utilizando uma válvula electrónica se não contornarmos, do ponto de vista das componentes variáveis, a resistência de polarização de cátodo R_k. O respectivo esquema de ligações é representado na fig. I.1. Neste esquema, admitimos que as tensões e as correntes são sinusoidais, representadas pelas suas amplitudes complexas, funções da variável complexa $s = j\omega$. O respectivo esquema equivalente é representado na fig. I.2.

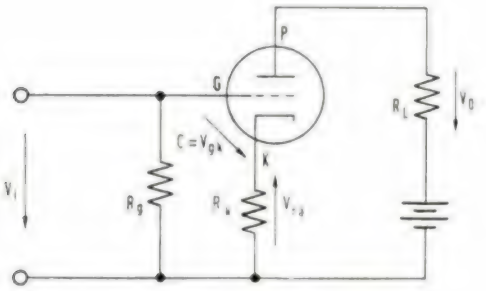


Fig. I.1

Em relação a este circuito equivalente, verificamos que o sinal realimentado V_{ra} é proporcional à corrente de saída I_0. A função combinação, que é a tensão aplicada aos terminais grelha-cátodo da válvula, será

$$C = V_{gk} = V_i + V_{ra} \qquad (1)$$

O quociente

$$\frac{V_{ra}}{I_0} = Z_\beta = R_k \qquad (2)$$

define a impedância de transferência Z_β da malha de realimentação β.

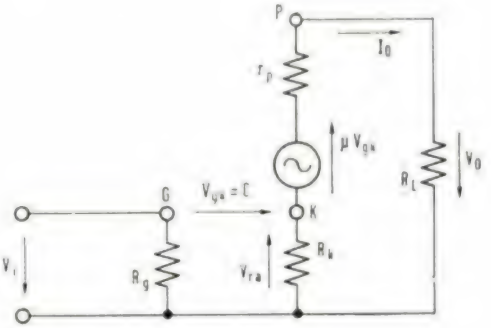


Fig. I.2

Ao circuito equivalente da figura I.2 poderemos então fazer corresponder o diagrama de blocos em termos da Teoria da Realimentação, ilustrado na fig. I.3.

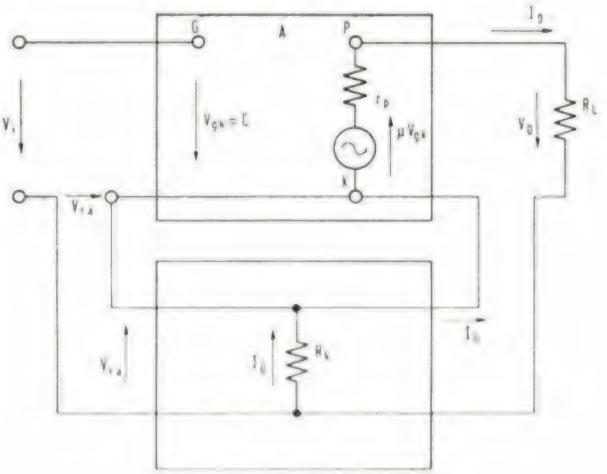


Fig I.3

Em relação a esta figura, poderemos escrever a equação básica da realimentação (2.7) que aqui reproduzimos:

$$K = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 - \beta A} \qquad (3)$$

(*) A preparação deste Apêndice foi feita com a colaboração do Assistente Eng.º Pedro Luís Borges Teixeira.

(**) Este circuito encontra-se estudado no § 7.4, Cap. VII, Livro III, ELECTRÓNICA APLICADA, do Autor, Edição da AEIST, 1966. As conclusões fundamentais são, contudo, agora apresentadas à luz da teoria geral feita no presente estudo.

em que

$$A = \frac{V_o}{C} = \frac{V_o}{V_{gk}} \qquad (4)$$

e

$$\beta = \frac{V_{ra}}{V_o} \qquad (5)$$

Em relação a este circuito, verificam-se as seguintes equações relativas a amplitudes complexas

$$\mu V_{gK} + I_o (r_p + R_L + R_K) = 0 \qquad (6)$$

$$V_o = I_o R_L \qquad (7)$$

$$V_{ra} = I_o R_K \qquad (8)$$

donde se conclui

$$A = \frac{-\mu R_L}{R_L + R_K + r_p} \qquad (9)$$

e

$$\beta = \frac{R_K}{R_L} \qquad (10)$$

A substituição destas quantidades na equação fundamental (3) leva a:

$$K = \frac{-\mu R_L}{r_p + R_L + (1 + \mu) R_K} \qquad (11)$$

Neste circuito, em que se consideram apenas impedâncias resistivas puras, as funções de transferência A, β e K são dadas por números reais.

É de notar que, a expressão (11) de K, poderia ter sido estabelecida sem recorrer ao emprego das equações da Teoria da Realimentação, directamente do circuito equivalente da fig. I.2.

Analisemos agora qual a influência da realimentação nas impedâncias de entrada e de saída do sistema.

A impedância de entrada deste circuito será infinita, na medida em que admitimos ser nula a corrente de grelha na válvula amplificadora.

A impedância de saída é a impedância vista dos terminais de saída, admitindo que a fonte de sinal aplicada na entrada é substituída pela sua impedância interna. O respectivo esquema é dado na fig. I.4 em relação ao qual se verificam as equações

$$V_{gK} + I R_K = o \qquad (12)$$

$$I r_p - \mu V_{gK} + I R_K - V = 0 \qquad (13)$$

de onde se conclui

$$Z_o = \frac{V}{I} = r_p + (1 + \mu) R_K \qquad (14)$$

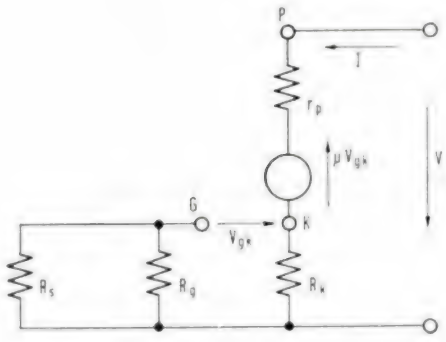


Fig. I.4

Reparemos ainda que, neste circuito, para não haver realimentação, seria necessário ser $R_K = o$ ou que a resistência R_K fosse contornada por uma impedância muito baixa para a frequência do sinal. Isto significa que a realimentação por degeneração catódica conduz a um aumento notável na impedância de saída do sistema que passa do valor

$$Z_o = r_p \quad \text{quando} \quad R_K = o \qquad (15)$$

para

$$Z_o = r_p + (1 + \mu) R_K \quad \text{quando} \quad R_K = R_K \qquad (16)$$

I.2 Circuito de degeneração de emissor

O esquema de ligações dum andar de amplificação utilizando um transistor, numa montagem de emissor comum, modificada, de modo a apresentar degeneração de emissor, é representada na fig. I.5. É a resistência R_E, não contornada, ligada em série com o emissor que assegura a realimentação negativa desejada. Trata-se dum

esquema prático, com polarização estabilizada, usado correntemente.

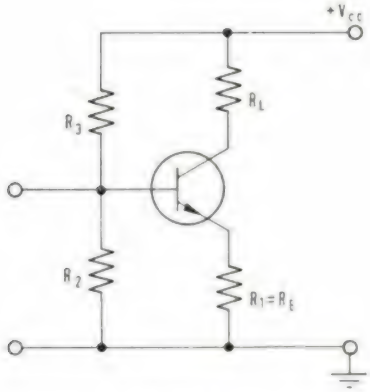


Fig. I.5

O estudo deste circuito, em funcionamento linear, pode fazer-se utilizando um esquema equivalente para o transistor. Se adoptarmos o esquema de configuração em T, para baixas frequências, e se desprezarmos o efeito das resistências R_2 e R_3, o circuito equivalente será o dado na fig. I.6.

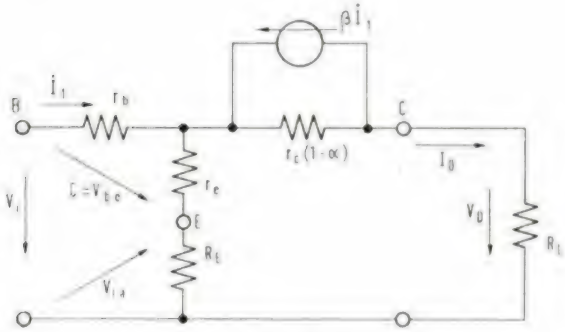


Fig. I.6

Deste esquema se conclui que tudo se passa como se a resistência r_e do transistor tivesse sido aumentada de R_E e o estudo do circuito faz-se então com simplicidade (*).

Vamos, contudo, neste Apêndice, adoptar a versão mais simplificada, para baixa frequência, do esquema de configuração em «π» híbrida, a que corresponde o circuito da fig. I.7, para a determinação aproximada das funções de transferência A, β e K, relativas a tensões.

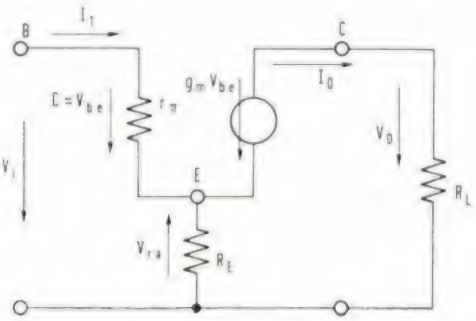


Fig. I.7

Do ponto de vista da Teoria da Realimentação, este esquema pode tomar o aspecto dado na fig. I.8.

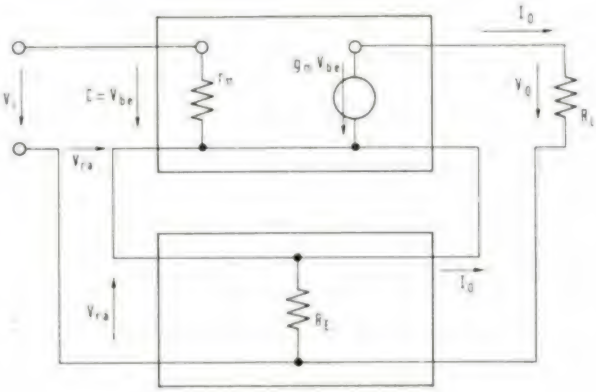


Fig. I.8

Em relação a estes esquemas podemos escrever as seguintes equações relativas a amplitudes complexas, que são válidas dentro da aproximação em que é válido o circuito equivalente adoptado.

$$I_o = - g_m V_{be} \tag{15}$$

$$V_o = I_o R_L = - g_m V_{be} R_L \tag{16}$$

$$A = \frac{V_o}{C} = \frac{V_o}{V_{be}} = - g_m R_L \tag{17}$$

$$V_{be} = I_1 r_\pi \tag{18}$$

$$V_{ra} = - I_1 (1 + g_m r_\pi) R_E \tag{19}$$

(*) V. § 7.5.2. Apêndice no. 3, Cap. XVII, Livro X, ELECTRÓNICA APLICADA, do Autor, Edição da AEIST, 1967.

$$\beta = \frac{V_{ra}}{V_o} = \frac{1 + g_m r_\pi}{g_m r_\pi} \frac{R_E}{R_L} \tag{20}$$

$$\beta \simeq \frac{R_E}{R_L} \text{ quando } g_m r_\pi >> 1 \tag{21}$$

$$V_i = V_{be} - V_{ra} \tag{22}$$

$$V_i = -\frac{V_o}{g_m R_L} - V_o \frac{1 + g_m r_\pi}{g_m r_\pi} \frac{R_E}{R_L} \tag{23}$$

$$K = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{g_m r_\pi R_L}{r_\pi + R_E (1 + g_m r_\pi)} \tag{24}$$

$$K \simeq -\frac{g_m R_L}{1 + g_m R_E} \text{ quando } g_m r_\pi >> 1 \tag{25}$$

$$K \simeq -\frac{R_L}{R_E} \text{ quando } \begin{array}{l} g_m r_\pi >> 1 \\ g_m R_E >> 1 \end{array} \tag{26}$$

$$Z_\beta = \frac{V_{ra}}{I_o} = \frac{1 + g_m r_\pi}{g_m r_\pi} R_E \tag{27}$$

$$Z_\beta \simeq R_E \text{ quando } g_m r_\pi >> 1 \tag{28}$$

A equação (24) podia ainda ser obtida a partir da equação fundamental da realimentação e das equações (17) e (20).

É de notar que no denominador de K, na equação (24), a resistência de degeneração de emissor R_E nos aparece multiplicada pelo factor $(1 + g_m r_\pi)$. Isto significa que o ganho de tensão K é muito reduzido pela realimentação.

É de notar ainda que se se verificarem as hipóteses simplificativas em que se baseia a equação (26), o ganho global de tensão fica independente dos parâmetros do transistor (e, portanto, das suas variações), dependendo apenas de R_E e R_L que podem ser fixadas com precisão.

Tem ainda interesse analisar o que se passa do ponto de vista do ganho de corrente do amplificador que será dado pela relação

$$K_i = \frac{I_o}{I_i} = \frac{-g_m V_{be}}{V_{be}/r_\pi} = -g_m r_\pi \tag{29}$$

e que, dentro das hipóteses simplificativas em que se baseia o esquema equivalente da fig. I.7, é independente da realimentação e das condições de carga. De facto, se tomássemos um esquema equivalente mais complexo encontraríamos para K_i uma expressão em função de R_E e R_L mas que mostraria que o ganho de corrente é apenas ligeiramente afectado pela realimentação.

Adoptando ainda o circuito equivalente da fig. I.7, podemos determinar a expressão da impedância de entrada que será

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_{be} - V_{ra}}{I_i} = r_\pi + (1 + g_m r_\pi) R_E \tag{30}$$

o que nos mostra que a impedância de entrada é aumentada da parcela $(1 + g_m r_\pi) R_E$ como resultado da realimentação.

Se quiséssemos relacionar esta impedância Z_i com a impedância apresentada à tensão $C = V_{be}$ na entrada do amplificador pròpriamente dito e que designamos por Z_{ic} teremos:

$$Z_{ic} = \frac{V_{be}}{I_i} = r_\pi \tag{31}$$

$$\beta . A = -\frac{R_E}{r_\pi} (1 + g_m r_\pi) \tag{32}$$

$$Z_i = r_\pi \left[1 + \frac{R_E}{r_\pi} (1 + g_m r_\pi) \right]$$

$$= Z_{ic} (1 - \beta A) \tag{33}$$

o que nos mostra que a impedância de entrada do conjunto é igual ao produto da impedância de entrada do amplificador pròpriamente dito pelo factor $f = (1 - \beta A)$ cujo módulo é superior à unidade na realimentação negativa.

Para averiguarmos da influência da realimentação na impedância de saída não podemos usar a versão simplificada do circuito equivalente representada na fig. I.7 pois que precisaremos ter em consideração a resistência r_o do transistor. Se admitirmos que a impedância interna do gerador aplicado na entrada é R_s, o circuito a considerar será o dado na fig. I.9

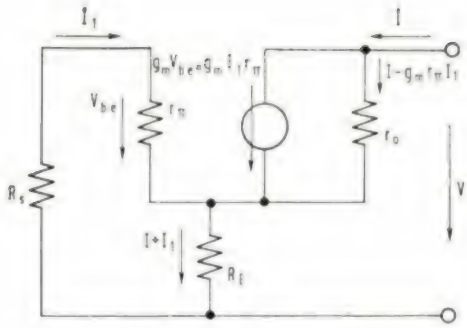


Fig. I.9

a que correspondem as equações

$$V = I\, r_o - g_m\, r_\pi\, r_o\, I_1 + I\, R_E + I_1\, R_E \qquad (34)$$

$$V \simeq I\, r_o - I_1\, g_m\, r_\pi\, r_o \text{ quando } r_o >> R_E \qquad (35)$$

$$I_1\,(r_\pi + R_s + R_E) + I\, R_E = 0 \qquad (36)$$

de onde se conclui

$$Z_o = \frac{V}{I} \simeq r_o \left[1 + \frac{g_m\, r_\pi\, R_E}{r_\pi + R_s + R_E} \right] \qquad (37)$$

expressão que nos mostra que a impedância de saída é aumentada como resultado da realimentação.

Nota: O produto $g_m\, r_\pi$ que nos aparece nas expressões vistas é igual, como se sabe, ao factor de amplificação $\beta = h_{fe}$ do transistor para baixas frequências.

APÊNDICE II (*)

EXEMPLO DE REALIMENTAÇÃO POR RELAÇÃO DE TENSÕES REALIMENTAÇÃO DE TENSÃO COM ACOPLAMENTO R-C (**)

O esquema da fig. II.1 representa o circuito prático de um andar amplificador com um tríodo, empregando acoplamento por resistência-capacidade, e no qual se introduziu uma realimentação negativa por relação de tensões.

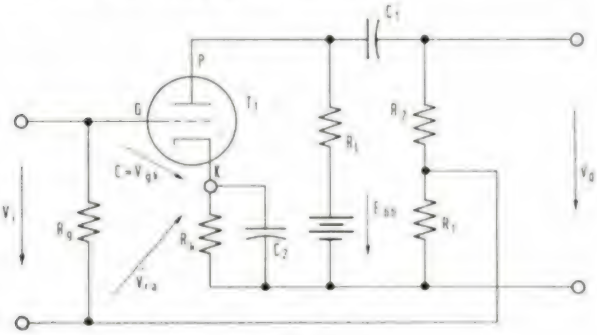


Fig. II.1

(*) A preparação deste Apêndice foi feita com a colaboração do Assistente Eng.º Pedro Borges Teixeira.

(**) Este circuito encontra-se estudado no § 7.5, Cap. VII, Livro III, ELECTRÓNICA APLICADA, do Autor, Edição da AEIST, 1966. As conclusões fundamentais são, contudo, agora apresentadas à luz da Teoria geral feita no presente estudo.

Na fig. II.2 representamos o circuito equivalente aproximado correspondente, válido para a zona central da faixa de A. F.; supõe-se assim que se podem desprezar as capacidades interelectródicas da válvula, e se podem considerar os condensadores C_1 e C_2 como curto-circuitos para as competentes variáveis do sinal.

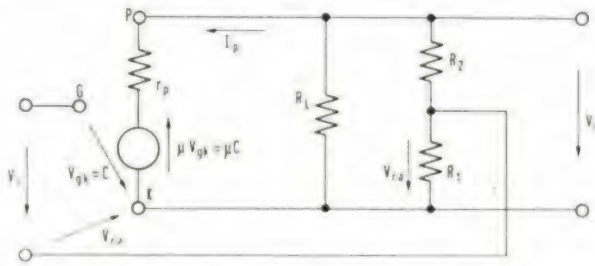


Fig. II.2

Do ponto de vista da Teoria da Realimentação, o esquema da fig. II.2 pode tomar o aspecto que se ilustra na fig. II.3.

Em relação a estes circuitos, podemos escrever as seguintes equações, do ponto de vista da teoria da realimentação:

$$R'_L = R_L \,//\, (R_1 + R_2) \qquad (1)$$

$$A = \frac{V_o}{V_{gk}} = -\frac{\mu\, R'_L}{v_{rp} + R'_L} \qquad (2)$$

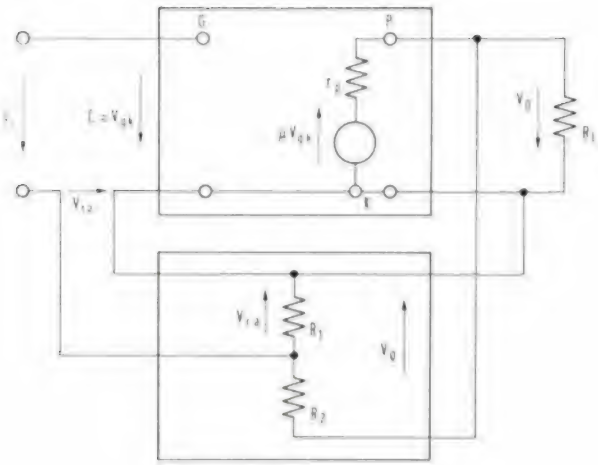


Fig. II.3

$$\beta = \frac{V_{rg}}{V_o} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{3}$$

$$K = \frac{A}{1 - A\beta} = \frac{-\mu R'_L}{r_P + R'_L(1 + \mu\beta)} \tag{4}$$

A expressão K mostra claramente como o ganho global vem reduzido pela acção da realimentação.

Quanto à impedância de entrada, esta será infinita na medida em que admitirmos ser nula a corrente de grelha na válvula amplificadora.

Para a determinação da impedância de saída, consideramos o esquema da fig. II.4 em que R_s é a impedância interna do gerador aplicado na entrada.

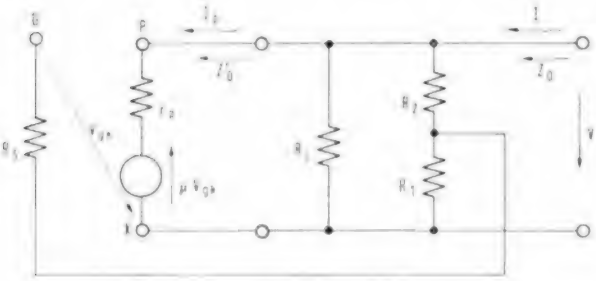


Fig. II.4

A impedância de saída do circuito global Z_o será pois igual ao paralelo de R'_L com a impedância de saída Z'_o da válvula amplificadora e podemos escrever

$$Z_o = \frac{V}{I} = R'_L \parallel Z'_o \tag{5}$$

$$Z'_o = \frac{V}{I_p} \tag{6}$$

$$V_{gk} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V = \beta V \tag{7}$$

$$V = I_p r_p - \mu V_{gk} = I_p r_p - \mu \beta V \tag{8}$$

$$Z'_o = \frac{r_p}{1 + \mu\beta} \tag{9}$$

$$Z_o = \frac{R'_L r_p}{R'_L(1 + \mu\beta) + r_p} \tag{10}$$

$$= \frac{R'_L r_p}{R'_L + r_p} \cdot \frac{1}{1 - \beta\left(\dfrac{-\mu R'_L}{r_p + R'_L}\right)} \tag{11}$$

$$= \frac{R'_L r_p}{R'_L + r_p} \cdot \frac{1}{1 - \beta A} \tag{12}$$

O primeiro factor da expressão (12) representa a impedância de saída quando for $\beta = 0$, isto é, quando não houver realimentação. Isto significa que a impedância de saída é reduzida pela realimentação, aparecendo-nos dividida pelo factor $F = 1 - \beta A$, como sucedia ao ganho global em relação ao ganho do amplificador pròpriamente dito.

Analisemos agora este circuito do ponto de vista da sua resposta de frequência. Como dissemos, o esquema equivalente da fig. II.2 é apenas válido na zona central da faixa de A.F.; por isso os ganhos A e K, dados, respectivamente, pelas equações (2) e (4), passarão a ser representados por A_0 e K_0. Reparemos ainda que o ganho A_0 pode tomar o aspecto

$$A_0 = -\frac{\mu R'_L}{r_P + R'_L} = -g_m R_{eq} \tag{13}$$

em que

$$R_{eq} = r_p // R'_L \tag{14}$$

sendo g_m a transcondutância da válvula amplificadora.

Se quisermos considerar a zona inferior da faixa de A.F., não podemos desprezar a reactân-

MAGUE

ASPECTO DA NOVA CENTRAL TÉRMICA DO CARREGADO (COMPANHIA PORTUGUESA DE ELECTRICIDADE, CPE) ACTUALMENTE CONSTITUÍDA POR DOIS ESCALÕES DE 125 MW, E EQUIPADA COM:

Caldeiras MAGUE, de 400 t/h de vapor sobreaquecido e resobreaquecido a 545°C, construídas em Portugal sob licença Foster Wheeler Corp. (E.U.A.), com "engineering", fabrico e montagem realizados pela MAGUE.

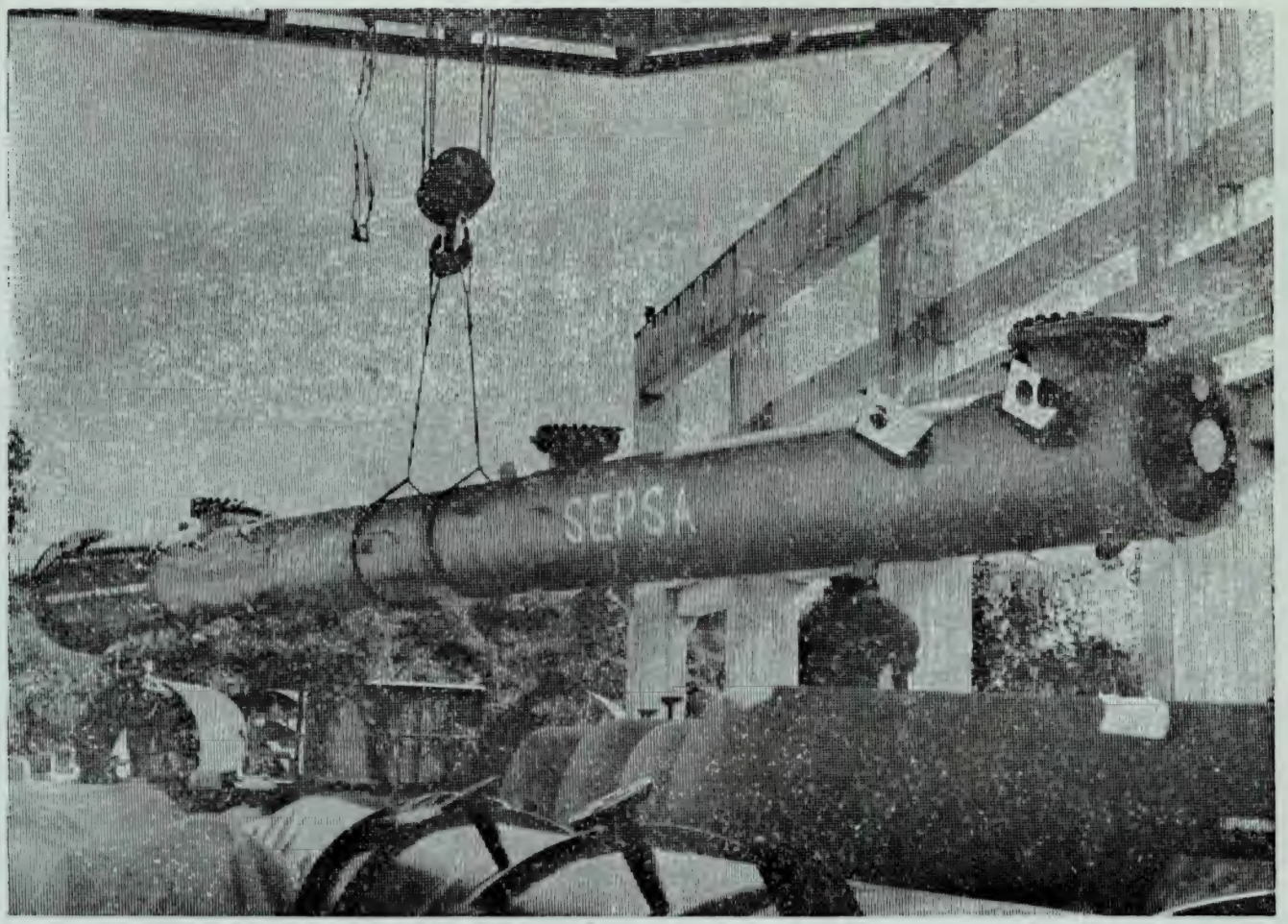
Turbo-Grupos Brown Boveri-MAGUE de 125 MW, construídos em grande parte pela MAGUE em colaboração e sob licença da Brown Boveri & Cie (Suiça).

Pórticos e Pontes Rolantes MAGUE, de concepção e construção MAGUE.

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL



SEPSA — Equipamento para a REFINARIA DA SACOR, no PORTO

- ALTERNADORES (de potência superior a 2000 kVA), COMPENSADORES SÍNCRONOS, MOTORES DE GRANDE POTÊNCIA (fabricação parcial).
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS QUÍMICAS E PETROQUÍMICAS
  Tubagens, tremonhas, reactores, permutadores, cisternas, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS PETROLÍFERAS
  Torres, balões, permutadores, filtros, aerorefrigerantes, tubagens, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS CIMENTEIRAS
  Fornos, moinhos, separadores, arrefecedores, etc.
- RESERVATÓRIOS
  De tecto fixo e tecto flutuante, de alta e baixa pressão. Para gases liquefeitos. Gasómetros
- EQUIPAMENTOS DE MANUTENÇÃO E TRANSPORTE
  Elevadores de alcatruzes, elevadores de palhetas, transportadores de tela metálica e de borracha, contentores, etc.
- ESTRUTURAS METÁLICAS
  Pontes, cimbres, coberturas, pisos, edifícios industriais, etc.
- MONTAGENS PESADAS

SEPSA SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTRO-MECÂNICAS, S.A.R.L.
APARTADO 8 • LEÇA do BAILIO • TELEX SEPSA P 2616

cia do condensador de acoplamento C_1 (*) e, nesse caso, a expressão do ganho do amplificador pròpriamente dito passará a ser

$$A_1 = \frac{-g_m R_{eq}}{1 + \frac{1}{j\omega C_1 R'_{eq}}} \tag{15}$$

em que

$$R'_{eq} = R_1 + R_2 + \frac{r_P R_L}{r_P + R_L} \tag{16}$$

De (13) e (15) conclui-se ainda

$$A_1 = \frac{A_0}{1 - j\frac{\omega_1}{\omega}} \tag{17}$$

em que

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 R'_{eq}} \tag{18}$$

é a frequência angular limite inferior (para a qual o módulo do ganho é reduzido de 3dB, em relação à zona central).

Ainda nesta zona inferior da faixa, averiguemos o que se passa quanto ao ganho global que designamos por K_1 e que será, pela equação fundamental da realimentação,

$$K_1 = \frac{A_1}{1 - \beta A_1} \tag{19}$$

Substituindo (17) em (19) e por ser

$$K_0 = \frac{A_0}{1 - \beta A_0} \tag{20}$$

conclui-se que será

$$K_1 = \frac{K_0}{1 - j\frac{\omega'_1}{\omega}} \tag{21}$$

em que

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1}{1 - \beta A_0} \tag{22}$$

Isto significa que a frequência angular limite inferior relativa ao ganho global fica reduzida pela acção da realimentação negativa. A redução corresponde à divisão de ω_1 pelo factor $F = 1 - \beta A_0$. Melhora-se, pois, nìtidamente, a resposta de frequência na zona inferior das A. F., pela acção da realimentação negativa, pois que a faixa de utilização é grandemente prolongada no sentido das baixas frequências.

No caso da zona superior da faixa de A. F., podemos desprezar a reactância do condensador de acoplamento C_1 mas não podemos deixar de considerar o efeito das capacidades interelectródicas da válvula amplificadora pròpriamente dita e da válvula do andar seguinte (se existir). Este efeito pode traduzir-se pela presença duma capacidade C_g em paralelo com as resistências R_L e $(R_1 + R_2)$. Nessas condições, o ganho do amplificador pròpriamente dito será

$$A_2 = \frac{-g_m R_{eq}}{1 + j\omega C_g R_{eq}} \tag{23}$$

Comparando com (13) pode escrever-se

$$A_2 = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \tag{24}$$

em que

$$\omega_2 = \frac{1}{C_g R_{eq}} \tag{25}$$

é agora a frequência angular limite superior (para a qual o módulo do ganho é reduzido de 3dB em relação à zona central).

Ainda na zona superior, o ganho global

$$K_2 = \frac{A_2}{1 - \beta A_2} \tag{26}$$

poderá tomar o seguinte aspecto

$$K_2 = \frac{K_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}} \tag{27}$$

(*) Continuamos, contudo, a desprezar a reactância do condensador de contorno C_2, no estudo que se faz a seguir.

em que a nova frequência angular limite superior será dada por

$$\omega'_2 = \omega_2 \left(1 - \beta A_0\right) \qquad (28)$$

e é agora, como resultado da realimentação, multiplicada pelo factor $F = (1 - \beta A_0)$.

A resposta de frequência no extremo superior da faixa é pois grandemente melhorada pela realimentação negativa pois que a faixa útil é grandemente prolongada no sentido das frequências elevadas.

APÊNDICE III (*)

CIRCUITO DE REALIMENTAÇÃO COMPOSTA

O esquema da fig. III.1 representa um andar amplificador com um tríodo onde se aplicam simultâneamente dois tipos de realimentação — por impedância de transferência através de Z_K e por relação de tensões, através da malha divisora $Z_1 - Z_2$. Trata-se, por conseguinte, dum circuito que emprega uma realimentação composta.

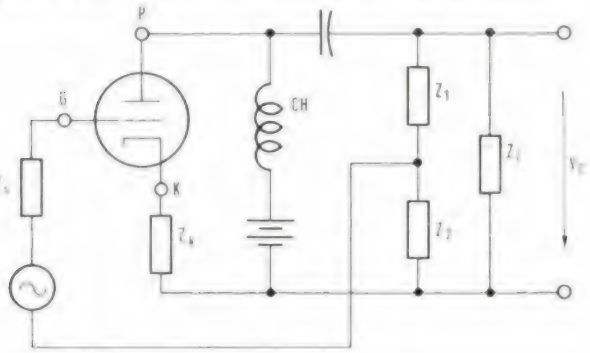


Fig. III.1

É de notar, desde já, que a presença de Z_K faz com que a impedância de saída aumente como vimos no Apêndice I; mas a malha de realimentação de tensão Z_1 e Z_2 provoca, como foi visto no Apêndice II, uma diminuição da impedância de saída. Estes dois efeitos tendem a compensar-se mùtuamente e da respectiva combinação poderemos, por exemplo, manter a impedância de saída pouco afectada pela realimentação.

Ao esquema da fig. III.1 podemos fazer corresponder o respectivo circuito equivalente, em regime linear, representado na fig. III.2.

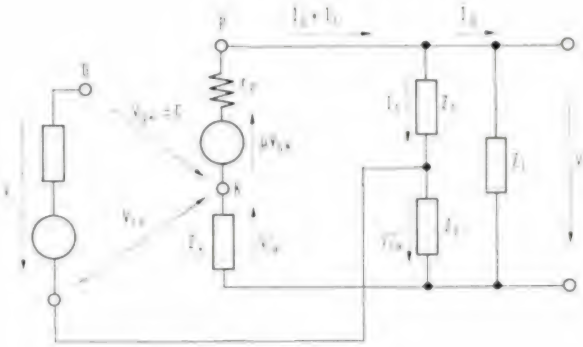


Fig. III.2

Em relação a estes circuitos podemos escrever as seguintes equações relativas a amplitudes complexas

$$V_{ra} = V'_{ra} + V''_{ra} \qquad (1)$$

$$\beta' = \frac{V'_{ra}}{V_0} = \frac{Z_K}{Z'_L} = \frac{Z_K}{Z_L} + \frac{Z_K}{Z_1 + Z_2} \qquad (2)$$

$$Z'_L = Z_L // (Z_1 + Z_2) \qquad (3)$$

$$\beta'' = \frac{V''_{ra}}{V_0} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (4)$$

$$\beta = \beta' + \beta'' = \frac{Z_K}{Z_L} + \frac{Z_2 + Z_K}{Z_1 + Z_2} \qquad (5)$$

$$A = \frac{V_o}{C} = \frac{V_0}{V_{gK}} = \frac{-\mu Z'_L}{V_p + Z_K + Z'_L} \qquad (6)$$

$$K = \frac{A}{1 - \beta A} \qquad (7)$$

As equações (5) a (7) dão-nos as funções de transferência relativas à teoria da realimentação.

(*) A preparação deste Apêndice foi feita com a colaboração do Assistente Eng.º Pedro Borges Teixeira.

A impedância de entrada neste circuito continua a ser infinita na medida em que admitimos ser nula a corrente de grelha na válvula amplificadora.

Quanto à impedância de saída, consideremos o circuito da fig. III.3.

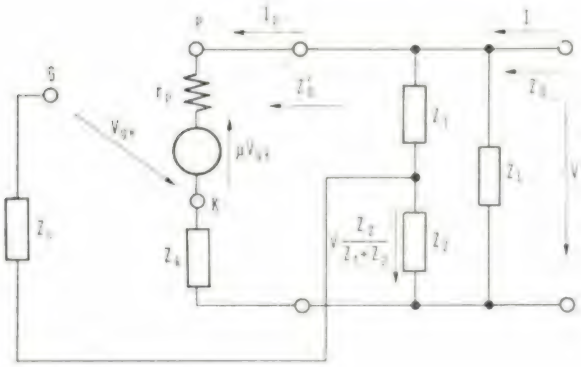


Fig. III.3

A impedância de saída do circuito global Z_0 será igual ao paralelo de Z'_L com a impedância de saída Z'_0 e podemos escrever

$$Z_0 = \frac{V}{I} = Z'_L \,//\, Z'_0 \tag{8}$$

$$Z'_0 = \frac{V}{I_P} \tag{9}$$

$$V_{gK} = -I_P Z_K + V \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{10}$$

$$V = I_P r_P - \mu V_{gK} + I_P Z_K$$

$$= I_P (r_P + Z_K) + \mu Z_K I_P - \mu V \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{11}$$

$$Z'_0 = \frac{r_P + Z_K (1 + \mu)}{1 + \mu \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{r_P + Z_K (1 + \mu)}{1 + \mu \beta''} \tag{12}$$

Sem realimentação ($\beta' = 0$, $\beta'' = 0$), Z'_0 seria igual a r_P. A realimentação por impedância de transferência aumentou-a da parcela $Z_K (1 + \mu)$. A realimentação por relação de tensões reduziu-a pelo factor $\dfrac{1}{1 + \mu \beta''}$.

APÊNDICE IV (*)

EXEMPLO DE REALIMENTAÇÃO POR ADMITÂNCIA DE TRANSFERÊNCIA. CIRCUITO DE REALIMENTAÇÃO LOCAL EM DERIVAÇÃO (**)

Na fig. IV.1 encontra-se representado o esquema de um andar amplificador de emissor comum que emprega realimentação local em derivação, obtida pela inclusão da resistência R_β entre colector e base.

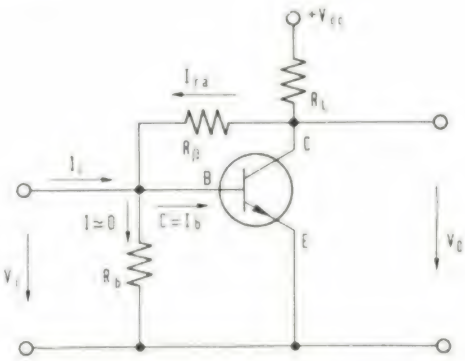


Fig. IV-1

Adoptemos, para o transistor, a versão mais simplificada, para baixa frequência, do esquema

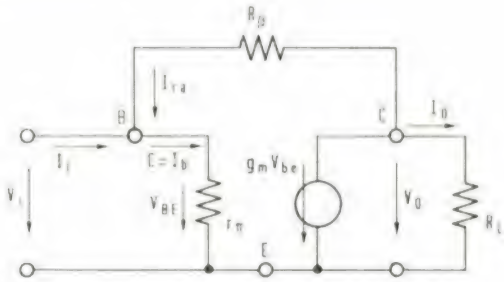


Fig. IV-2

(*) A preparação deste Apêndice foi feita com a colaboração do Assistente Eng.º Pedro Luís Borges Teixeira.

(**) Este circuito encontra-se estudado no § 17.5.3, Cap. XVII, Livro X, ELECTRÓNICA APLICADA, do Autor, Edição da AEIST, 1967. As conclusões fundamentais são, contudo, agora apresentadas à luz da teoria geral da realimentação. Também neste estudo se adopta, para o transistor, um esquema equivalente diferente e mais simplificado.

de configuração em π híbrida, a que corresponde o circuito da fig. IV.2, onde também desprezamos a presença da resistência R_b com o objectivo de determinarmos aproximadamente as funções de transferência A_i, β_i e K_i relativas a correntes.

O correspondente esquema de blocos, do ponto de vista da teoria da realimentação, é dado na fig. IV.3.

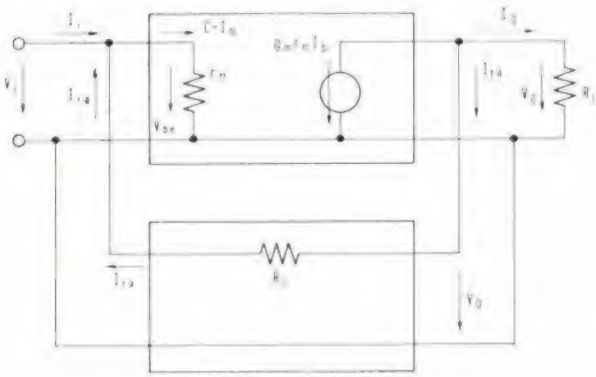


Fig. IV.3

Em relação a este circuito podemos escrever as seguintes equações relativas a amplitudes complexas

$$V_{be} = I_b \, r_\pi \tag{1}$$

$$V_0 - V_{be} - I_{ra} \, R_\beta = 0 \tag{2}$$

$$V_0 = I_0 \, R_L \tag{3}$$

$$I_b = I_i + I_{ra} \tag{4}$$

$$I_0 + I_{ra} + g_m \, r_\pi \, I_b = 0 \tag{5}$$

De (1) a (3) conclui-se

$$I_0 \, R_L - I_b \, r_\pi - I_{ra} \, R_\beta = 0 \tag{6}$$

De (5) e (9) obtêm-se as relações

$$A = \frac{I_0}{C} = \frac{I_0}{I_b} = \frac{r_\pi \, (1 - g_m \, R_\beta)}{R_L + R_\beta} \tag{7}$$

$$\simeq - \frac{g_m \, r_\pi \, R_\beta}{R_L + R_\beta} \tag{8}$$

quando $g_m \, r_\pi >> 1$

$$\beta_i = \frac{I_{ra}}{I_0} = \frac{g_m \, R_L + 1}{g_m \, R_\beta - 1} \tag{9}$$

$$\simeq \frac{R_L}{R_\beta} \text{ quando } g_m \, R_L >> 1 \tag{10}$$

$$g_m \, R_\beta >> 1$$

$$K_i = \frac{A_i}{1 - \beta_i \, A_i} \simeq - \frac{g_m \, r_\pi \, R_\beta}{R_\beta + R_L \, (1 + g_m \, r_\pi)}$$

$$\text{quando } g_m \, R_L >> 1 \tag{11}$$

$$g_m \, R_\pi >> 1$$

A admitância de transferência será, em vista de (3) e (10):

$$Y_\beta = \frac{I_{ra}}{V_0} \simeq \frac{1}{R_\beta} \quad \text{quando } g_m \, R_L >> 1 \quad g_m \, R_\beta >> 1 \tag{12}$$

Em relação à expressão (11) do ganho global de corrente K_i, deve notar-se que será, dentro das aproximações indicadas,

$$K_i \simeq - g_m \, r_\pi \simeq - \beta_0 = - h_{fe_0} \tag{13}$$

se for, ou $R_\beta = \infty$, ou $R_L = 0$. Em qualquer dos casos não haveria realimentação.

Para valores finitos de R_β e não nulos de R_L haverá realimentação negativa e o ganho global de corrente será apreciàvelmente reduzido.

Quanto ao ganho global de tensão

$$K = \frac{V_0}{V_i} = \frac{V_0}{V_{be}} = \frac{I_0 \, R_L}{I_b \, r_\pi} = A_i \, \frac{R_L}{r_\pi} \tag{14}$$

$$\simeq - g_m \, \frac{R_\beta \, R_L}{R_\beta + R_L} \simeq - g_m \, R_L \text{ quando } R_\beta >> R_L$$

vemos que é sensìvelmente independente da realimentação quando se verificarem as hipóteses simplificativas referidas.

Ainda em relação ao esquema das figs. IV.2 e IV.3 concluímos, quanto à impedância de entrada, em vista de (1), (4), (5), (7) e (8)

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_{be}}{I_i} = \frac{I_b\, r_\pi}{I_b - I_{ra}} = \frac{r_\pi}{1 + \dfrac{g_m\, r_\pi R_L}{R_L + R_\beta}} \quad (15)$$

$$= \frac{r_\pi\,(R_L + R_\beta)}{R_\beta + R_L\,(1 + g_m\, r_\pi)} \quad (16)$$

expressão aproximada que será válida dentro das hipóteses simplificativas referidas.

Estas expressões mostram que quando $R_\beta = \infty$, isto é, quando não houver realimentação, a impedância de entrada será r_π. Mostram ainda que a realimentação provoca uma redução na impedância de entrada. Por ser, de (8) e (10),

$$1 - \beta_i\, A_i = 1 + \frac{g_m\, r_\pi\, R_L}{R_L + R_\beta} \quad (17)$$

a equação (15) mostra que a impedância na ausência de realimentação fica dividida pelo factor $F = 1 - \beta_i\, A_i$ como resultado da realimentação.

Para estudarmos a influência da realimentação na impedância de saída precisamos de ter em consideração a resistência r_0 no esquema equivalente do transistor, utilizando, assim, o esquema da fig. IV.4, em que R_s é a impedância interna do gerador ligado na entrada.

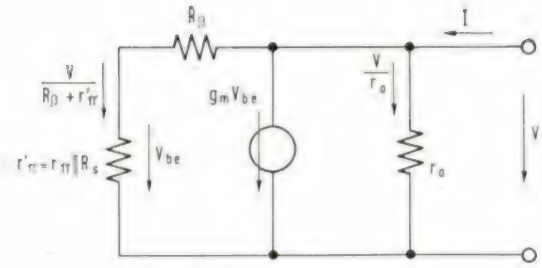


Fig. IV.4

Em relação a este circuito podemos escrever

$$I = \frac{V}{r_0} + g_m\, V_{be} + \frac{V}{R_\beta + r'_\pi} \quad (18)$$

$$\frac{V_{be}}{V} = \frac{r'_\pi}{r'_\pi + R_\beta} \quad (19)$$

De onde se conclui

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_\beta + r'_\pi} + \frac{g_m\, r'_\pi}{r'_\pi + R_\beta} \quad (20)$$

ou seja que

$$Z_0 = r_0 // (R_\beta + r'_\pi) // \frac{r'_\pi + R_\beta}{g_m\, r'_\pi} \quad (21)$$

$$\simeq r_0 // \frac{R_\beta}{1 + g_m\, r'_\pi} \quad \text{quando } r'_\pi << R_\beta \quad (22)$$

A impedância de saída será igual a r_0 quando for $R_\beta = \infty$ (e não houver, pois, realimentação). Como resultado da realimentação, haverá uma redução apreciável na impedância de saída pela ligação em paralelo com r_0 da resistência equivalente $R_\beta / (1 + g_m\, r'_\pi)$.

(Continua)

C. D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

OUTUBRO

— Breve nota mensal

As afluências ao conjunto do sistema hidróeléctrico situaram-se, porém, acima da média, atingindo cerca de 375 GWh, valor a que corresponde um coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica de 1,23 e tem uma probabilidade de ser excedido da ordem dos 24 %, o que se deve aos apreciáveis caudais transitados nos aproveitamentos do Douro Internacional, por efeito de um desarmazenamento muito intenso na albufeira espanhola de Ricobayo.

O regime de afluências do ano hidrológico, Novembro de 1968 a Outubro de 1969, apresentou-se favorável, correspondendo-lhe um coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica de 1,34.

II — Elementos gerais (GWh)

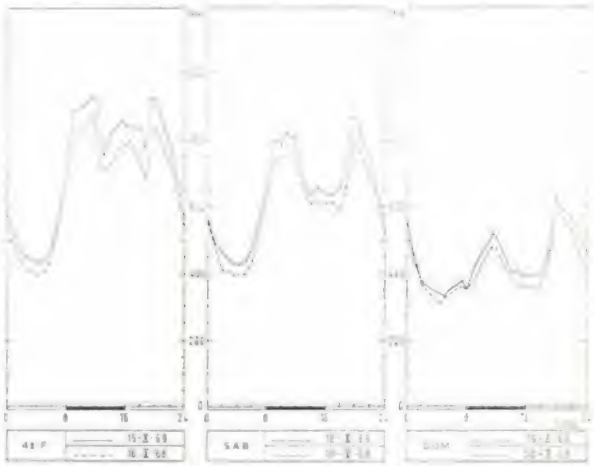
	a) Mensais		Variação %
	1968	1969	
Produção hidráulica (P_h)	377,5	501,1	+ 33
Produção térmica (P_t)	81,4	0,0	—100
Produção total (P_T)	458,9	501,1	+ 9
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	0,4	1,5	+275
Exportações (Ex)	3,0	4,0	+ 33
Importações (I)	3,5	2,7	— 23
Saldo importador (S_I)	+ 0,5	—1,3	—360
Cons. em bomb. hidroelé. C_b) (1)	0,0	0,0	0
Produção para consumos perman. (P_{cp})	448,7	491,9	(1) + 9,6
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	11,1	9,4	— 15
Total	459,8	501,3	+ 9
Coeficiente de hidraulicidade	0,91	1,23	—

NOTA:

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 9,3 e 9,1 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira:	
			1968	1969
Produção hidráulica		(P_h) MWh	12 719	17 484
Produção térmica		(P_t) MWh	3 360	0
Produção total		(P_T) MWh	16 079	17 484
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	100	115
	Import.	(I) MWh	100	95
Cons. em bomb. hidroel.		(C_b) MWh	0	0
Prod. p.ª cons. perm.		(P_{cp}) MWh	15 581	17 160
Prod. p.ª cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	498	304
TOTAL		$P_T + (-Ex)$ MWh	16 079	17 464
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	871	952
		Potência mín. MW	397	431
		Utiliz. da ponta horas	18,5	18,7
		Factor de carga	0,77	0,78
	P_{cp}	Potência máx. MW	850	922
		Potência mín. MW	376	420
		Utiliz. da ponta horas	18,3	18,6
		Factor de carga	0,76	0,78



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês	
	GWh	% (1)
Alto Rabagão	641,6	65,9
Paradela	95,9	43,1
Venda Nova	92,6	72,3
Salamonde	22,7	82,3
Caniçada	11,1	33,5
Vilar	29,6	29,4
Cabril	143,2	42,2
Castelo do Bode	55,4	34,0
Guilhofrei	1,8	21,7
Lagoa Comprida	(2) 28,2	74,0
Santa Luzia	38,0	61,7
Pracana	5,9	45,7
Póvoa	(3) 5,7	38,5
Total com A. Rabagão	1171,7	55,2
Total sem A. Rabagão	530,1	46,1

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 2,3 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 1,8 GWh no fim do mês.

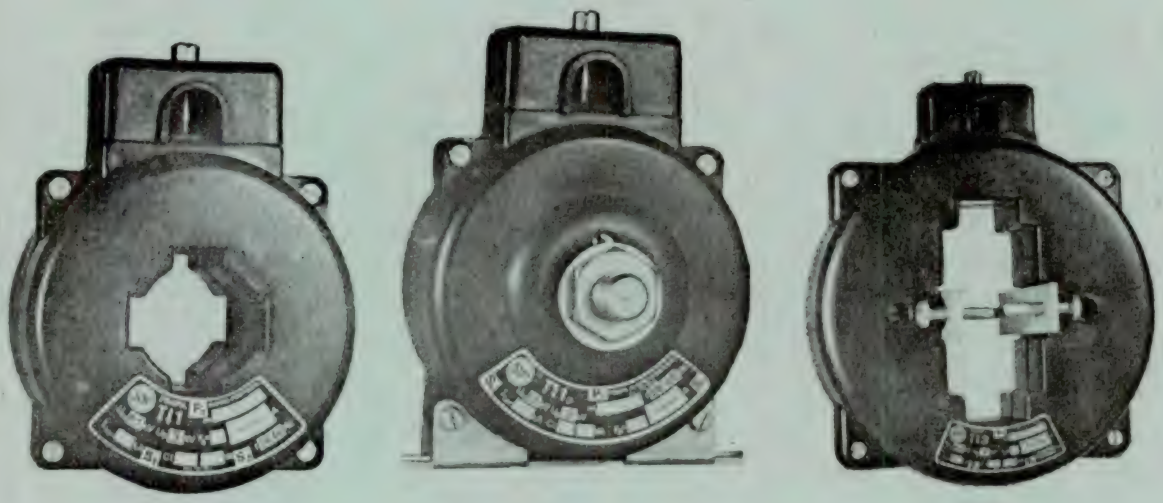
(3) Inclui 1,7 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 1,5 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

FRAPIL

CONSTRUÇÕES E MONTAGENS ELÉCTRICAS

SARL



transformadores de intensidade

SF

núcleo magnético toroidal • perdas extra-reduzidas • vasta gama de utilizações

caixas de polipropileno antichoque

licença | SACI

SEDE E INSTALAÇÕES FABRIS
CAIS DE SÃO ROQUE
APARTADO 20
TELEFONE 23071 2
AVEIRO

DELEGAÇÃO NO SUL
RUA CASTILHO
38, r/c.-dt.
TELEFONE 5 25 28
LISBOA-1

042.71:2575

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS

SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FELTROS, FILTROS E TECIDOS INDUSTRIAIS PARA TODOS OS FINS:

EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS,
DE QUALQUER FIBRA

PASTA PARA PAPEL
PAPEL
FIBROCIMENTO
CURTUMES
FIAÇÕES DE ALGODÃO
LINHAS
INDÚSTRIAS QUÍMICAS

TECELAGENS
ACABAMENTOS
TINTURARIAS
LAVANDARIAS
ESTAMPARIAS
FILTROS
DESPOEIRAGEM

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 621.391.812.6 : 62.001.57

CANAL BINÁRIO AFECTADO POR RUÍDO INTERMITENTE. ANÁLISE DE UM MODELO.

Por ALEXANDRE G. CERVEIRA
Assistente do C.E.E. da C.E.E.N. do I.A.C.
Assistente do I. S. T.

J. M. FONSECA DE MOURA
Bolseiro no C.E.E. da C.E.E.N. do I.A.C.

J. M. POMBO DUARTE
Eng.º Electrotécnico

RESUMO

Para estudar o funcionamento de um modelo de comunicação binária em presença de ruído intermitente começa-se por fazer uma descrição pormenorizada do sistema e das transformações que o sinal sofre no seu trânsito. Após a concretização do modelo procedeu-se ao cálculo da probabilidade de transmissão de um certo conjunto de mensagens sem erro, quer através do método analítico, quer através do método de Monte Carlo.

SYNOPSIS

This paper studies the performance of a model of binary communication in presence of burst noise. It begins with a complete description of the system and of the signal transformations. Assuming specifications for the model it is possible to evaluate the probability of correct transmission of a given set of messages. This evaluation is done by analytic methods and by Monte Carlo method.

1 INTRODUÇÃO

A presença de ruído intermitente («burst noise»), manifestando-se muito intenso durante intervalos de tempo de duração aleatória e reduzindo-se pràticamente a zero no resto do tempo, também por intervalos de duração aleatória, é muito frequente nos meios físicos de comunicação, sendo o ruído que ocorre em contactos, na atmosfera gerado por descargas, etc..

Com o fim de imunizar a transmissão de informação existem códigos correctores de erros múltiplos e consecutivos que se adaptam ao tipo de ruído acima descrito. O funcionamento destes códigos é todavia complicado e exigente na aparelhagem. Para conseguir uma imunidade apreciável do processo informativo, sem complicar em demasia os sistemas de codificação utilizados, vamos encarar um esquema em que se recorre a um código corrector de erros simples e a um reagrupamento dos símbolos a transmitir por forma a separar por mensagens diferentes, os estados consecutivos de ruído ocorridos na transmissão.

Com o fim de apreciar o ganho introduzido pela reordenação, que introduz atraso mas não símbolos redundantes suplementares, procedeu-se ao cálculo da probabilidade de transmitir uma dada sequência de mensagens sem erro. Obteve-se sem reordenação o valor de 4 %, ao passo que se obteve a probabilidade de 54 % quando se adiciona a possibilidade de reagrupar os símbolos. Este ganho na probabilidade de transmissão correcta é, pois, obtido à custa do atraso o que está de acordo com a teoria de Shannon.

Procedeu-se igualmente à determinação, pelo método de Monte Carlo, da probabilidade acima referida e obteve-se 57 % (este valor, devido ao pequeno número de ensaios, tem variância elevada). A finalidade posta nesta determinação pelo método de Monte Carlo foi a de ensaiar um método que nos desse uma estimativa aproximada das probabilidades, sem a morosidade e a complicação do método analítico. O resultado é encorajador no sentido de explorar, pelo método de Monte Carlo, modelos de sistemas de comunicação binária em ruído intermitente com outras características, em especial, maior número de graus de liberdade estatísticos.

O estudo da codificação para o ruído intermitente,nas linhas gerais aqui apresentadas, foi sugerido a um dos autores, durante uma missão de estudo, que efectuou nos Estados Unidos da América pelo Professor Gallager do «Massachusetts

Institute of Technology». Como se proporcionasse, por via da rúbrica de Actividades do III Plano de Fomento para 1968, a colaboração de dois alunos do último ano do curso de Engenharia Electrotécnica no Centro de Estudos de Electrónica, o Director do Centro aprovou a realização do estudo de um modelo de transmissão binária com ruído intermitente, que está na base da presente publicação.

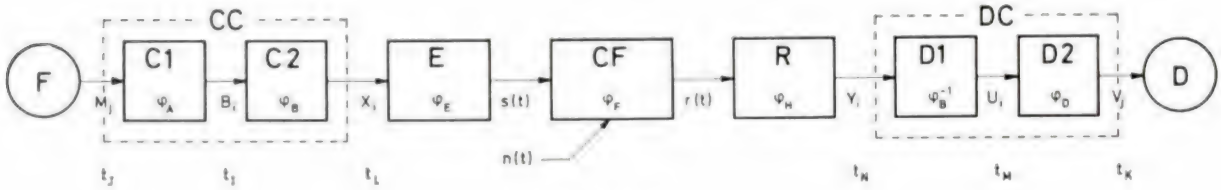


Fig. 1

1.1 O sistema de comunicação

Consideremos, como base, um sistema de comunicações com a constituição indicada na Fig. 1. Neste sistema existem várias unidades com funções bem definidas, que compreendem:

- a fonte de informação F;
- o centro de codificação CC, com duas sub-unidades C1 e C2;
- a unidade E referente ao emissor;
- a unidade que compreende o canal físico de transmissão, CF, que tem presente o ruído intermitente;
- a unidade R referente ao receptor, circuito de decisão incluído;
- a unidade de descodificação DC, com duas sub-unidades D1, e D2;
- finalmente, o destinatário D.

A fonte de informação F é responsável pela geração das mensagens, que ocorrem segundo uma estatística caracterizada por uma distribuição de probabilidades e por um alfabeto de α símbolos

$$\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\alpha\} \qquad (1)$$

O centro de codificação transforma as mensagens geradas na fonte, primeiro, na sub-unidade C1, segundo um código corrector de erros e de tal forma que à saída se tenham símbolos binários. A sub-unidade C2 opera uma reordenação dos símbolos o que permite uma melhor adaptação entre a fonte e o canal, no que se refere à transmissão de informação. Ao contrário de C1 não introduz qualquer redundância suplementar.

A unidade E fornece a energia necessária à excitação do meio físico de transmissão e promove uma adaptação conveniente e simultânea para a transmissão da energia e da informação através do meio físico. No caso de excitação electromagnética a adaptação está patente no sistema de modulação e nas antenas.

O canal físico de transmissão CF propaga a excitação introduzida pelo emissor até ao receptor, onde chega com um determinado atraso, modificada segundo as características de transferência do meio físico e corrompida pelo ruído que iremos imaginar como sendo exclusivamente do tipo intermitente.

Em R teremos os circuitos de entrada que procedem à eliminação de interferências propagadas pelo mesmo meio físico e à detecção que se refere à desmodulação. Como se trata de obter sinais binários a desmodulação processa-se sempre num circuito de decisão. Em resumo, R amplifica e processa o sinal recebido de forma a regenerar um sinal binário.

O centro de descodificação DC transforma os símbolos fornecidos pelo receptor, na primeira sub-unidade, segundo o código de reordenação inverso do utilizado em C2. A segunda sub-unidade D2 procede à descodificação segundo o código corrector de erros utilizado em C1.

Finalmente, o destinatário irá receber mensagens todas elas provenientes de um alfabeto de β símbolos

$$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\beta\} \qquad (2)$$

1.2 Funcionamento estatístico

Os símbolos ou sinais à saída destas várias unidades, dada a característica casual da fonte de informação e do ruído podem assimilar-se a variáveis aleatórias com determinado comportamento estatístico.

Designaremos por letras maiúsculas o nome das variáveis aleatórias e por letras minúsculas os valores tomados por essas variáveis aleatórias. O conjunto de valores que uma variável aleatória pode tomar é o seu espaço de resultados que designaremos genèricamente por Ω.

Dado que as várias unidades, com excepção da fonte e do canal físico, não geram sinais, mas procedem exclusivamente à sua transformação, é possível estabelecer entre a sequência de símbolos à entrada e a sequência de símbolos à saída uma correspondência determinística e, pelo menos *unívoca*, que designaremos, em geral, por função de transferência φ. Dada a memória limitada das unidades, as funções de transferência referem-se a secções finitas das sequências de entrada e de saída, eventualmente de dimensões ξ e ζ diferentes

$$(Z_{J+1}, Z_{J+2}, \ldots, Z_{J+\xi}) = \varphi\,(Y_{I+1}, Y_{I+2}, \ldots, Y_{I+\zeta}) \qquad (3)$$

Por outro lado o facto das unidades terem memória leva à introdução de atrasos entre as sequências correspondentes de entrada e de saída, facto esse que é indicado pelo uso de índices iniciais diferentes.

O seu significado em (3) é o seguinte: *a*) Y_I existe no instante t_I; *b*) ao passo que Z_J é produzido no instante t_J. Em conclusão a sequência de saída está atrasada em relação à sequência de entrada de $(t_J - t_I)$.

Certos sinais, entre eles o ruído, referem-se a funções definidas em intervalos de tempo finitos; seja f(t) uma função definida no intervalo de tempo (a,b). Uma correspondência baseada sobre esta função no intervalo de tempo indicado será uma correspondência funcional, a indicar por φ^1, que na notação de Volterra se escreverá

$$\varphi^1 \left[f(t) \right]_a^b \qquad (4)$$

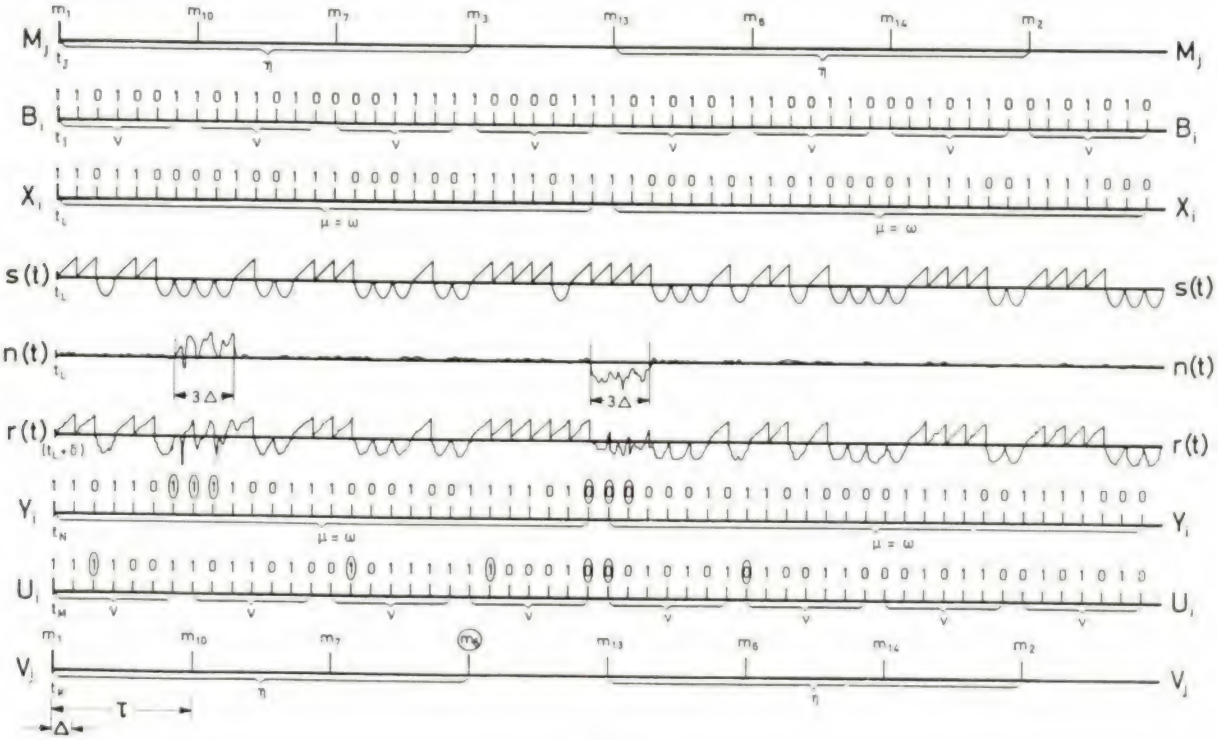


Fig. 2

Vamos descrever, em pormenor, o que se passa nas várias unidades do sistema, começando por se mostrar, na Fig. 2 num exemplo simplificado, o funcionamento do sistema nas suas diferentes fases.

1.2.1

A fonte F gera uma sequência de mensagens a que vamos fazer corresponder, dado o seu carácter aleatório, a sequência de variáveis aleatórias

$$\ldots, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots \tag{5}$$

Todas as variáveis aleatórias da sequência gerada por F têm como domínio discreto (espaço de resultados discreto) o alfabeto da fonte

$$\Omega(M_i) = \{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\alpha\} \tag{6}$$

Admitiremos que a fonte gera mensagens ao ritmo constante e igual a $(\tau)^{-1}$ de tal forma que as variáveis aleatórias

$$M_J, M_{J+1}, M_{J+2}, \ldots \tag{7}$$

são produzidas nos instantes

$$t_J, t_J + \tau, t_J + 2\tau, \ldots \tag{8}$$

1.2.2

Através da sub-unidade codificadora C1 obter-se-á uma sequência de variáveis aleatórias

$$\ldots, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots \tag{9}$$

com domínio binário $\Omega(B_i) = \{0,1\}$. Esta sequência resulta por secções da sequência de mensagens da fonte, através de uma função de transferência φ_A, característica do código corrector de erros utilizado

$$(B_{I+1}, B_{I+2}, \ldots, B_{I+\nu}) = \varphi_A(M_{J+1}, M_{J+2}, \ldots, M_{J+\lambda}) \tag{10}$$

Verifica-se que o código corrector faz corresponder a λ mensagens M_i, ν símbolos binários e, portanto, se o ritmo dos símbolos binários for constante e igual a $(\Delta)^{-1}$ terá que existir a seguinte relação entre τ e Δ

$$\lambda\tau = \nu\Delta \tag{11}$$

À saída do segundo codificador, C2, teremos uma sequência de variáveis aleatórias, ainda de domínio binário $\Omega(X_i) = \{0,1\}$,

$$\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots \tag{12}$$

que resulta da sequência anterior B_i. A função de transferência φ_B é característica do código de reordenação, o qual por não produzir novos símbolos (não introduz redundância), aplica secções de dimensão μ em secções da mesma dimensão

$$(X_{L+1}, X_{L+2}, \ldots, X_{L+\mu}) = \varphi_B(B_{I+1}, B_{I+2}, \ldots, B_{I+\mu}) \tag{13}$$

Como o codificador C2 não introduz novos símbolos a sequência de variáveis aleatórias X_i é produzida ao mesmo ritmo que a sequência B_i mas secções equivalentes encontram-se atrasadas de $(t_L - t_I)$.

1.2.3

Seguidamente a sequência de símbolos X_i é transformada na unidade do emissor num sinal contínuo $s(t)$ que irá excitar o meio físico de transmissão. Já sabemos que a sequência

$$X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{i+k}, \ldots \tag{14}$$

é produzida nos instantes

$$t_i, t_i + \Delta, \ldots, t_i + k\Delta, \ldots \tag{15}$$

Vamos definir $s(t)$ por intervalos como se segue

— para $t \in (t_i, t_i + \Delta)$, $s(t) = \varphi_E(X_i, t)$;

— para $t \in (t_i + \Delta, t_i + 2\Delta)$, $s(t) = \varphi_E(X_{i+1}, t)$;

e de uma maneira geral para

$$t \in (t_i + k\Delta, t_i + k\Delta + \Delta),\ s(t) = \varphi_E(X_{i+k}, t) \tag{16}$$

em que φ_E é a função de transferência da unidade E e que traduz, entre outras coisas, a modulação.

Pelo facto da sequência de símbolos binários à entrada do emissor ser aleatória, o sinal s(t) é também aleatório e a sua evolução estatística depende das características estatísticas da sequência de variáveis aleatórias X_i, que por sua vez através das funções φ_B e φ_A se relacionam com as propriedades estatísticas da fonte.

1.2.4

Vamos agora proceder à descrição do canal físico de transmissão. Neste canal gera-se uma perturbação, ruído intermitente, descrita no tempo pela função n(t). À entrada do receptor (saída de CF) temos uma função r(t) que nos surge como se o meio físico de transmissão procedesse a uma transformação conjunta do sinal s(t) e do ruído n(t), de tal forma que, sendo δ o atraso na transmissão do emissor para o receptor, se pode escrever

$$r(t+\delta) = \varphi_F [\, s(t), n(t) \,] \qquad (17)$$

em que se admite que o canal não tem memória, isto é, o sinal recebido $r(t+\delta)$ resulta, em cada instante $(t+\delta)$, dos valores de s(t) e de n(t) no instante correspondente t.

A função φ_F traduz, portanto, do ponto de vista do receptor, a transformação conjunta do sinal emitido e do ruído.

Dado que o ruído intermitente se caracteriza por apresentar nível elevado em determinados intervalos e nível pràticamente nulo na parte restante do tempo, é natural que se quantifique este tipo de ruído em dois estados: *a)* o estado 1 corresponde à presença de ruído com nível elevado (em inglês «burst»); *b)* o estado 0 correspondente, pràticamente, à ausência de ruído no canal físico de transmissão.

Se se definirem estes estados ao ritmo $(\Delta)^{-1}$ e sìncronamente com os símbolos X_i, então, dada a sua origem casual, pode-se falar numa sequência de variáveis aleatórias

$$\ldots, W_{-1}, W_0, W_1, W_2, \ldots \qquad (18)$$

com domínio $\Omega(W_i) = \{0,1\}$ e que representam os estados de ruído do canal físico.

A definição de W_{L+i} a partir de n(t) no intervalo $(t_L + i\Delta,\ t_L + i\Delta + \Delta)$ pode fazer-se através de uma funcional conveniente Θ^1

$$W_{L+i} = \Theta^1 \Big[\, n(t) \Big]_{t_L + i\Delta}^{t_L + i\Delta + \Delta} \qquad (19)$$

Utilizaremos, por vezes, a palavra inglesa «burst» para indicar um conjunto de estados $(W=1)$ que são consecutivos, por desconhecermos a palavra portuguesa que a substitui neste contexto.

1.2.5

No receptor R a forma de onda r (t) é analisada por intervalos de tempo $(t_N + k\Delta - \Delta, t_N + k\Delta)$ correspondentes aos intervalos $(t_L + k\Delta, t_L + k\Delta + \Delta)$ no emissor, o que quer dizer que se está a proceder a uma *recepção síncrona*. Em relação a cada intervalo de tempo

$$(t_N + k\Delta - \Delta, t_N + k\Delta) \qquad (20)$$

o circuito de decisão do receptor escolhe um símbolo binário Y_{N+k}, pelo que ao ritmo de $(\Delta)^{-1}$ se obterá uma sequência de variáveis aleatórias

$$\ldots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, \ldots \qquad (21)$$

com domínio $\Omega(Y_i) = \{0, 1\}$. Podemos associar ao circuito de decisão R uma transferência funcional φ_R^1

$$Y_{N+1} = \varphi_R^1 \Big[\, r(t) \Big]_{t_N}^{t_N + \Delta} \qquad (22)$$

Notar que sendo Y_N a variável aleatória correspondente a X_L então o atraso entre as sequências Y_i e X_i é exactamente

$$(t_N - t_L) = \delta + \Delta \qquad (23)$$

Se fizermos depender explìcitamente a variável aleatória Y_N do sinal s(t) e do ruído n(t), então recorremos a uma transferência funcional conjunta φ_{HF}^1

$$Y_N = \varphi_{HF}^1 \Big[\, s(t)\ ,\ n(t) \Big]_{t_L}^{t_L + \Delta} \qquad (24)$$

Como porém, $s(t)$ no intervalo $(t_L + i\Delta, t_L + i\Delta + \Delta)$ só depende de X_{L+i}, pode definir-se a operação de decisão do receptor através da funcional φ_H^1 tal que

$$Y_{N+i} = \varphi_H^1 \left[X_{L+i}, \; n(t) \Big|_{t_L + i\Delta}^{t_L + i\Delta + \Delta} \right] \qquad (25)$$

1.2.6

Na ausência de ruído, as sequências X_i e Y são iguais; quando o ruído está presente a existência de um *observador* permitiria, por comparação, definir a sequência

$$\ldots, E_{-1}, E_0, E_1, E_2, \ldots \qquad (26)$$

que assinala os erros. Chamaremos a esta sequência a sequência dos *erros binários*; é formada pelas variáveis aleatórias E_i com a seguinte definição

$$\begin{cases} E_{N+i} = 0 \iff X_{L+i} = Y_{N+i} \\ E_{N+i} = 1 \iff X_{L+i} \neq Y_{N+i} \end{cases} \qquad (27)$$

que se pode sintetizar numa função Ψ, característica do *observador*

$$E_{N+i} = \Psi(X_{L+i}, Y_{N+i}) \qquad (28)$$

O domínio de E_i é binário, isto é, $\Omega(E_i) = \{0, 1\}$.

Mas como

$$Y_{N+i} = \varphi_H^1 \left[X_{L+i}, n(t) \Big|_{t_L + i\Delta}^{t_L + \Delta i + \Delta} \right] \qquad (29)$$

pode escrever-se que

$$E_{N+i} = \Psi^1 \left[X_{L+i}, n(t) \Big|_{t_L + i\Delta}^{t_L + i\Delta + \Delta} \right] \qquad (30)$$

em que a funcional Ψ^1 resulta da função Ψ e da funcional φ_H^1.

1.2.7

Continuando na especificação do sistema de comunicações temos que considerar agora o centro de descodificação que, como já vimos, comporta duas sub-unidades. À saída da primeira, D 1, obtém-se uma sequência de variáveis aleatórias.

$$\ldots, U_{-1}, U_0, U_1, U_2, \ldots \qquad (31)$$

com $\Omega(U_i) = \{0, 1\}$. Esta sequência provém de uma rearrumação dos símbolos que é inversa da imposta por C 2 e é, portanto, caracterizada pela função de transferência φ_B^{-1}, inversa de φ_B. Logo

$$(U_{M+1}, U_{M+2}, \ldots, U_{M+\mu}) = \qquad (32)$$
$$= \varphi_B^{-1}(Y_{N+1}, Y_{N+2}, \ldots, Y_{N+\mu})$$

que opera sobre secções de μ variáveis aleatórias, tal como φ_B, e com um atraso de $(t_M - t_N)$.

O segundo descodificador, D 2, refere-se ao código corrector de erros. À saída teremos as mensagens a entregar ao destinatário que vamos associar às variáveis aleatórias

$$\ldots, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \ldots \qquad (33)$$

Estas variáveis aleatórias têm como espaço de resultados o alfabeto do destinatário

$$\Omega(V_i) = \{v_1, v_2, \ldots, v_\beta\} \qquad (34)$$

e resultam da sequência dos U_i através da função de descodificação φ_D tal que

$$(V_{K+1}, V_{K+2}, \ldots, V_{K+\lambda}) = \qquad (35)$$
$$= \varphi_D(U_{M+1}, U_{M+2}, \ldots, U_{M+\nu})$$

e que de certo modo é inversa da função de codificação φ_A. Secções de dimensão ν são aplicadas em secções de dimensão λ, em concordância com o que faz φ_A. Verifica-se, desta forma, que o ritmo de produção das mensagens V_j é $(\tau)^{-1}$ e, portanto, igual ao ritmo de geração das mensagens na fonte.

Nesta sub-unidade o atraso introduzido é expresso, tal como se tem feito até aqui, por $(t_K - t_M)$.

1.2.8

É necessário estabelecer uma comparação entre a sequência de variáveis aleatórias V_j e a

sequência de M_j para se avaliar da transmissão de informação entre a fonte e o destinatário. Nesta comparação as sequências devem considerar-se por secções equivalentes que formem blocos autónomos, isto é com dimensão

$$\omega = \text{m.m.c.}\,(\nu, \mu, 1) \tag{36}$$

para as sequências binárias, e dimensão

$$\eta = \frac{\Delta}{\tau}\,\omega \tag{37}$$

para as sequências de mensagens, quer da fonte, quer do destinatário.

Recorrendo a uma funcional de transferência φ_T^1 que resuma, na totalidade, a acção do sistema de comunicações proposto, escreve-se

$$(V_{K+1}, V_{K+2}, \ldots, V_{K+\eta}) = \tag{38}$$

$$= \varphi_T^1 \left[(M_{J+1}, M_{J+2}, \ldots, M_{J+\eta}) ;\ \mathbf{n}(t) \Big|_{t_L+\Delta}^{t_L+\omega\Delta+\Delta} \right]$$

Para maior simplicidade na comparação, vamos impôr que o alfabeto da fonte e o alfabeto do destinatário são iguais

$$\{ m_1, m_2, \ldots, m_\alpha \} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_\beta \} \tag{39}$$

o que quer dizer que $\alpha = \beta$ e que $m_i = v_i$ para $i = 1, 2, \ldots, \alpha$. Então, se $V_{K+i} = M_{J+i}$ a mensagem de ordem $(J + i)$ foi transmitida sem erro e se $V_{K+i} \neq M_{J+i}$ a mensagem de ordem $(J + i)$ foi transmitida em erro.

Nesta altura pode definir-se uma sequência de *erros em mensagens* através de

$$\ldots, G_{-1}, G_0, G_1, G_2, \ldots \tag{40}$$

que, dado o carácter aleatório do ruído, se podem considerar variáveis aleatórias com domínio binário

$$\Omega\,(G_i) = \{ 0, 1 \} \tag{41}$$

Para definir estas variáveis aleatórias vamos recorrer a uma função γ tal que a relação

$$G_{K+i} = \gamma\,(M_{J+i}, V_{K+i}) \tag{42}$$

satisfaz as seguintes condições

a) $G_{K+i} = 0$ corresponde à transmissão correcta da mensagem M_{J+i};

b) $G_{K+i} = 1$ corresponde à transmissão incorrecta da mensagem M_{J+i}.

Conjugando a função γ com a funcional φ_T^1 obteremos

$$(G_{K+1}, G_{K+2}, \ldots, G_{K+\eta}) = \tag{43}$$

$$= \gamma_T^1 \left[(M_{J+1}, M_{J+2}, \ldots, M_{J+\eta}) ;\ \mathbf{n}(t) \Big|_{t_L+\Delta}^{t_L+\omega\Delta+\Delta} \right]$$

Mas como a sequência $(M_{J+1}, M_{J+2}, \ldots, M_{J+\eta})$ se relaciona unìvocamente com a sequência $(X_{L+1}, X_{L+2}, \ldots, X_{L+\omega})$ através das funções φ_A e φ_B, pode escrever-se a sequência de *erros em mensagens* como se segue

$$(G_{K+1}, G_{K+2}, \ldots, G_{K+\eta}) =$$

$$= \gamma_S^1 \left[(X_{L+1}, X_{L+2}, \ldots, X_{L+\omega}) ;\ \mathbf{n}(t) \Big|_{t_L+\Delta}^{t_L+\omega\Delta+\Delta} \right] \tag{44}$$

Finalmente, se atendermos ao facto de

$$E_{N+i} = \Psi^1 \left[X_{L+i},\ \mathbf{n}(t) \Big|_{t_L+i\Delta}^{t_L+i\Delta+\Delta} \right] \tag{30}$$

a conjugação de γ_S^1 com Ψ^1 leva-nos a estabelecer uma relação entre *erros binários* e *erros em mensagens*

$$(G_{K+1}, G_{K+2}, \ldots, G_{K+\eta}) =$$

$$= \gamma_R\,(E_{N+1}, E_{N+2}, \ldots, E_{N+\omega}) \tag{45}$$

através da função unívoca. γ_R

1.3. Probabilidade de ocorrência de determinadas sequências de erros

1.3.1

Vamos principiar por tratar dos *erros binários*. A ocorrência da sequência

$$e_{N+1}, e_{N+2}, \ldots, e_{N+\omega} \tag{46}$$

na transmissão binária possui uma probabilidade dada por

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\right\} \tag{47}$$

Recorrendo a um teorema das probabilidades condicionadas, pode-se escrever

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\right\}= \tag{48}$$

$$=\sum_{\Omega_X}\sum_{\Omega_W}P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\,\middle|\right.$$

$$\left.\bigcap_{i=1}^{\omega}\left[(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\right]\right\}\cdot$$

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(X_{L+i}=x_{L+i})\right\}\cdot\ P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}$$

com $x_i \varepsilon \Omega(X_i)$ e $w_i \varepsilon \Omega(W_i)$ e em que Ω_X é o espaço de resultados obtido pelo produto cartesiano de $\Omega(X_i)$ com i desde $L+i$ até $L+\omega$

$$\Omega_X=\prod_{i=1}^{\omega}\Omega(X_{L+i}) \tag{49}$$

Anàlogamente

$$\Omega_W=\prod_{i=1}^{\omega}\Omega(W_{L+i}) \tag{50}$$

Dado que no espaço das probabilidades condicionadas aqui introduzido os acontecimentos $(E_{N+i}=e_{N+i})$ são estatìsticamente independentes pode-se factorizar a expressão da probabilidade condicionada

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\,\middle|\right. \tag{51}$$

$$\left.\bigcap_{i=1}^{\omega}[(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}=w_{L+i})]\right\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{\omega}P\left\{(E_{N+i}=e_{N+i})\,\middle|\,\bigcap_{i=1}^{\omega}[(X_{L+i}=x_{L+i})\cap\right.$$

$$\left.(W_{L+i}=w_{L+i})]\right\}$$

Por outro lado o acontecimento $(E_{N+i}=e_{N+i})$ só depende dos acontecimentos correspondentes $(X_{L+i}=x_{L+i})$ e $(W_{L+i}=w_{L+i})$ sendo independente de quaisquer outros acontecimentos das sequências; logo

$$P\left\{(E_{N+i}=e_{N+i})\,\middle|\,\bigcap_{i=1}^{\omega}[(X_{L+i}=x_{L+i})\cap\right.$$

$$\left.(W_{L+i}=w_{L+i})]\right\}$$

$$=P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid(X_{L+i}=x_{L+i})\cap$$

$$(W_{L+i}=w_{L+i})\} \tag{52}$$

A probabilidade de uma dada sequência de *erros binários* pode-se escrever como

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\right\}=$$

$$=\sum_{\Omega_X}\sum_{\Omega_W}\prod_{i=1}^{\omega}P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid \tag{53}$$

$$(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\}\cdot$$

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(X_{L+i}=x_{L+i})\right\}\ P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}$$

1.2.3

Podemos encarar nesta altura o problema da determinação da probabilidade de ocorrência de uma dada sequência de *erros em mensagens*

$$g_{K+1},\ g_{K+2},\ \ldots,\ g_{K+n} \tag{54}$$

Essa probabilidade será dada por

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\} \tag{55}$$

que se pode calcular a partir da probabilidade das sequências de *erros binários* recorrendo ao problema clássico da mudança de variável, caso discreto, da teoria das probabilidades

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\}=$$

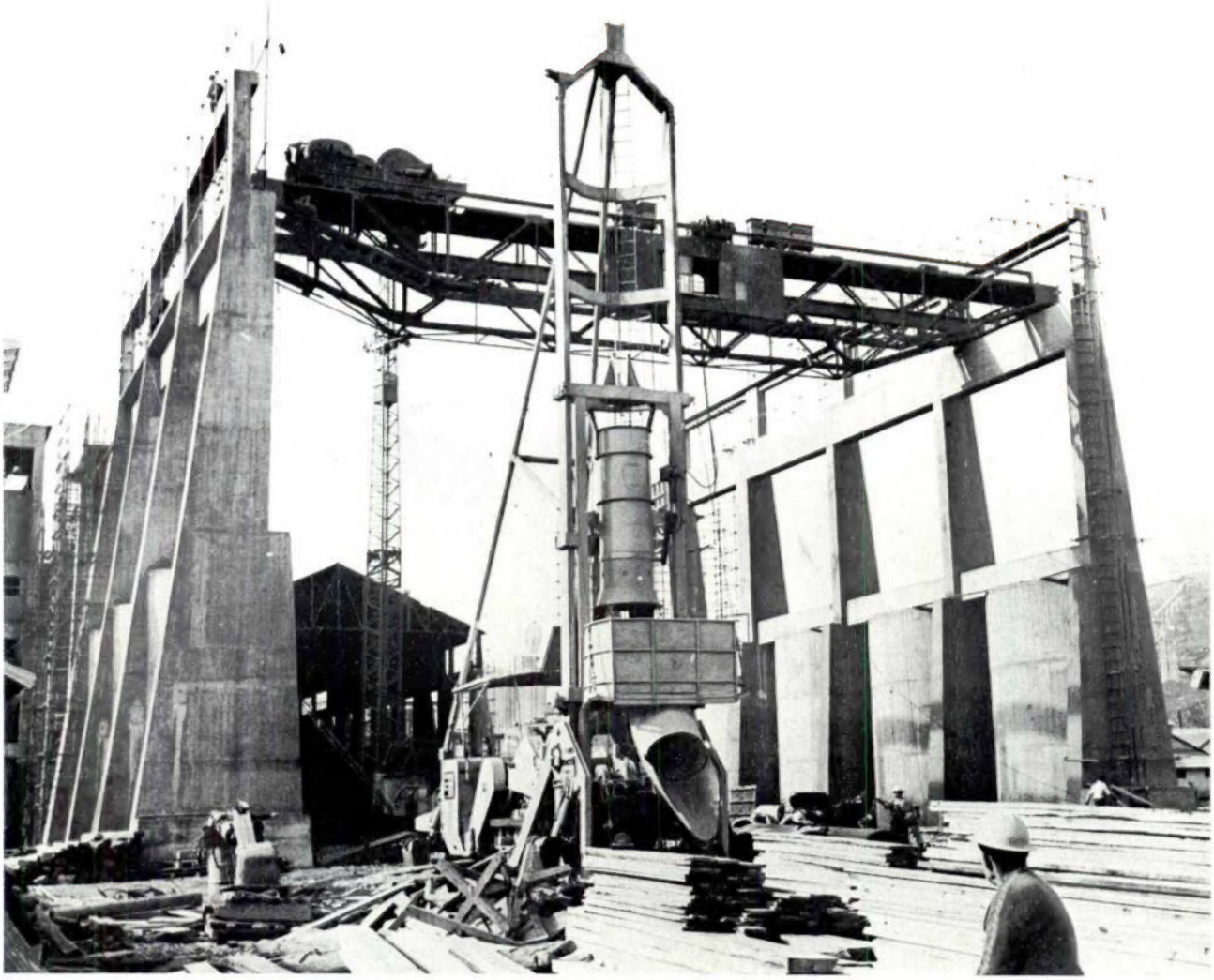
$$=\sum_{D}P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(E_{N+i}=e_{N+i})\right\} \tag{56}$$

em que D é o domínio de todas as sequências

$$e_{N+1},\ e_{N+2},\ \ldots,\ e_{N+\omega} \tag{57}$$

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

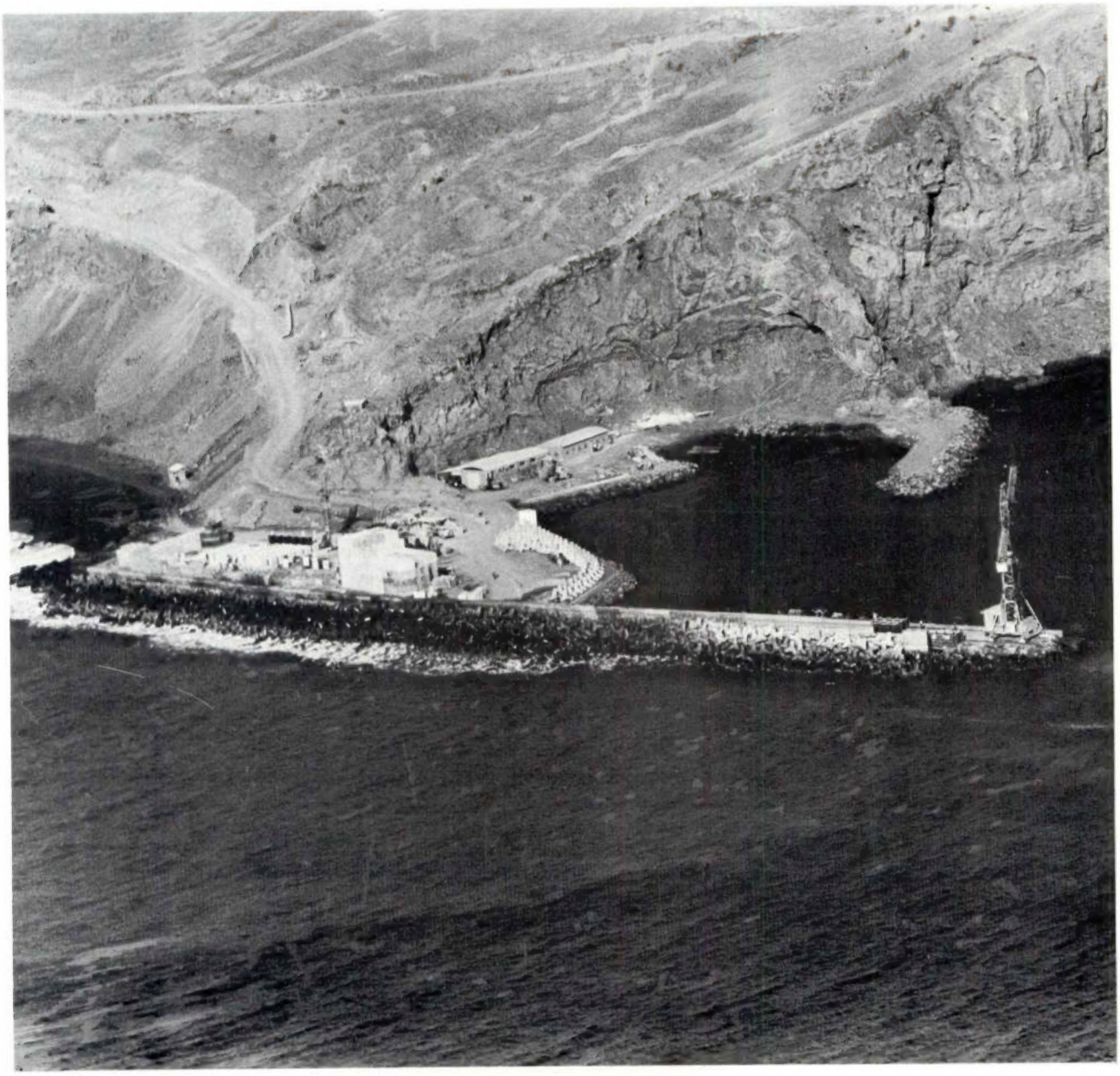


COMPANHIA CIMENTO TEJO — Alhandra — Hangar para clínquer. Fundações com estacas Ø 1,00 metro. Estacas de areia para drenagem do subsolo lodoso.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS
FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE



MINISTÉRIO DO ULTRAMAR — DIRECÇÃO-GERAL DE OBRAS PÚBLICAS E COMUNICAÇÕES
Ilha do Fogo (Cabo Verde) — Obras Portuárias de Vale de Cavaleiros.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS
FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

que dão origem à sequência (54) através da função unívoca γ_R atrás definida. Concluindo pode escrever-se

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{\omega}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\}=$$
$$=\sum_{D}\sum_{\Omega_X}\sum_{\Omega_W}\prod_{i=1}^{\omega}P\left\{(E_{N+i}=e_{N+i})\,\middle|\,(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}. \tag{58}$$
$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(X_{L+i}=x_{L+i})\right\}.\,P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}$$

em que os números η,ω e o domínio D estão ligados com a estratégia de codificação, isto é, dependem das unidades CC e DC. A probabilidade $P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(X_{L+i}=x_{L+i})\right\}$ refere-se à estatística da fonte com a qual está ligada pelas funções de transferência φ_A e φ_B.

A quantidade $P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}$ refere-se ao ruído intermitente e ao seu comportamento estatístico.

Finalmente, $P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\}$ traduz o funcionamento estatístico do conjunto formado pelo emissor, canal físico de transmissão e receptor.

2. MODELO

Iremos agora especificar um modelo em que se indica:

a) O funcionamento estatístico do conjunto emissor, canal físico e receptor;

b) A estatística do ruído;

c) A estratégia de codificação.

2.1 Funcionamento estatístico do conjunto emissor, canal físico e receptor

Vamos impôr, em primeiro lugar, a condição de simetria no funcionamento, qualquer que seja o estado de ruído. Analìticamente a simetria impõe

$$\begin{cases} P\{(E_{N+i}=0)\mid(X_{L+i}=1)\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\}= \\ =P\{(E_{N+i}=0)\mid(X_{L+i}=0)\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\} \\ P\{(E_{N+i}=1)\mid(X_{L+i}=0)\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\}= \\ =P\{E_{N+i}=1)\mid(X_{L+i}=1)\cap(W_{L+i}=w_{L+i})\} \end{cases} \tag{59}$$

e, portanto, resulta que

$$P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid(X_{L+i}=x_{L+i})\cap(W_{L+i}= =w_{L+i})\}= =P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid(W_{L+i}=w_{L+i})\} \tag{60}$$

visto o valor tomado pela variável aleatória E_{N+i} ser estatìsticamente independente do valor assumido pela variável aleatória X_{L+i}.

Resulta deste facto que a expressão (58) se reduz a

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\eta}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\}= \tag{61}$$
$$=\sum_{D}\sum_{\Omega_W}\prod_{i=1}^{\omega}P\{(E_{N+i}=e_{N+i})\mid(W_{L+i}=w_{L+i})\}.$$
$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}$$

visto $\sum_{\Omega_X}P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(X_{L+i}=x_{L+i})\right\}=1$ factorizar na expressão.

A outra imposição feita sobre o funcionamento exprime-se em haver erro sempre que o nível de ruído é elevado, $(W=1)$ (durante o «burst»), e a não haver erro quando o nível de ruído é pràticamente nulo, $(W=0)$; por conseguinte teremos

$$\begin{cases} P\{(E_{N+i}=0)\mid(W_{L+i}=0)\}=1 \\ P\{(E_{N+i}=1)\mid(W_{L+i}=0)\}=0 \\ P\{(E_{N+i}=0)\mid(W_{L+i}=1)\}=0 \\ P\{(E_{N+i}=1)\mid(W_{L+i}=1)\}=1 \end{cases} \tag{62}$$

Chama-se a atenção para o facto deste esquema de funcionamento ser demasiado simplista e divorciado da realidade; a razão pela qual se escolheu está na possibilidade de encarar uma solução analítica.

Uma consequência importante desta hipótese é a simplificação que introduz na expressão (61)

pelo facto de as probabilidades condicionadas serem ou um ou zero, conforme as variáveis aleatórias tomam o mesmo valor binário ou valores diferentes, respectivamente.

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{n}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\}=$$

$$=\sum_{D}P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=e_{N+i})\right\} \qquad (63)$$

2.2 Estatística do ruído

Dado que o ruído é intermitente, o estado $(W=1)$ ocupa vários intervalos de tempo consecutivos de dimensão Δ, constituindo um «burst».

Neste modelo iremos considerar constante o número de intervalos ocupados por cada «burst» e escolher esse número igual a 3; portanto, os «burst» terão duração de $(3\,\Delta)$. Isto quer dizer que existem dependências estatísticas de 3.ª ordem na sequência de variáveis aleatórias W_i, o que permite classificá-la como uma cadeia de Markov de 3.ª ordem e, por conseguinte,

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}=$$

$$=P\left\{(W_{L+1}=w_{L+1})\cap(W_{L+2}=w_{L+2})\right.$$

$$\left.\cap(W_{L+3}=w_{L+3})\right\}. \qquad (64)$$

$$\prod_{i=4}^{\omega}P\left\{(W_{L+i}=w_{L+i})\,|\,[(W_{L+i-1}=w_{L+i-1})\right.$$

$$\left.\cap(W_{L+i-2}=w_{L+i-2})\cap(W_{L+i-3}=w_{L+i-3})]\right\}$$

Ora, no sentido de simplificar esta expressão, ainda que formalmente, vamos substituir a sequência de variáveis aleatórias W_i por outra sequência de variáveis aleatórias

$$\ldots,N_{-1},N_0,N_1,N_2,\ldots \qquad (65)$$

em que $\Omega(N_i)=\{0,1,2,3\}$. A relação entre estas duas sequências pode ser dada através de uma correspondência ρ

$$N_i=\rho(W_i,W_{i-1},W_{i-2}) \qquad (66)$$

tal que

— se $(W_i=0)$, então $(N_i=0)$;

— se $(W_i=1)$ e $(W_{i-1}=0)$, então $(N_i=1)$;

— se $(W_i=1),(W_{i-1}=1)$ e $(W_{i-2}=0)$, então $(N_i=2)$;

— se $(W_i=1),(W_{i-1}=1)$ e $(W_{i-2}=1)$, então $(N_i=3)$.

Pode concluir-se que, apesar da correspondência ρ só se verificar para determinados trios de argumentos, ela é suficiente para traduzir a sequência (18) na sequência (65). Uma consequência importante desta transformação é conduzir-nos a uma sequência de variáveis aleatórias N_i que forma uma cadeia simples de Markov em que as probabilidades de transição P_{00}, P_{01}, P_{12}, P_{23} e P_{30}, tal como são indicadas no grafo da Fig. 3, têm o significado que se indica a seguir

$$\begin{aligned}
P_{00}&=P\{N_{L+1}=0)\,|\,(N_{L+i-1}=0)\}\\
P_{01}&=P\{N_{L+1}=1)\,|\,(N_{L+i-1}=0)\}\\
P_{12}&=P\{N_{L+1}=2)\,|\,(N_{L+i-1}=1)\}=1\\
P_{23}&=P\{N_{L+i}=3)\,|\,(N_{L+i-1}=2)\}=1\\
P_{30}&=P\{N_{L+i}=0)\,|\,(N_{L+i-1}=3)\}=1
\end{aligned} \qquad (67)$$

em que a notação utilizada põe em evidência o facto das probabilidades de transição serem independentes do tempo.

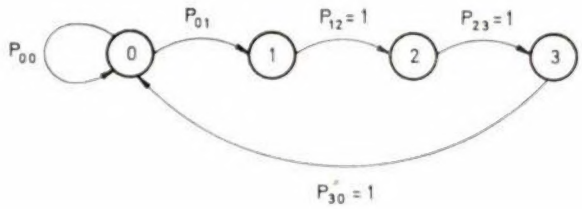


Fig. 3

Na correspondência ρ há uma troca entre a ordem da cadeia de Markov e a dimensão do espaço de resultados. Aplicando as últimas conclusões pode escrever-se

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(W_{L+i}=w_{L+i})\right\}= \qquad (68)$$

$$=P\left\{\bigcap_{i=1}^{\omega}(N_{L+i}=n_{L+i})\right\}=P\{(N_{L+1}=n_{L+1})\}.$$

$$\prod_{i=2}^{\omega}P\left\{(N_{L+i}=n_{L+i})\,\middle|\,(N_{L+i-1}=n_{L+i-1})\right\}$$